HØGSKOLEN I ØSTFOLD, AVDELING FOR INFORMASJONSTEKNOLOGI

Forkurs i matematikk

14. juni 2018
Løsningsforslag

Christian F. Heide

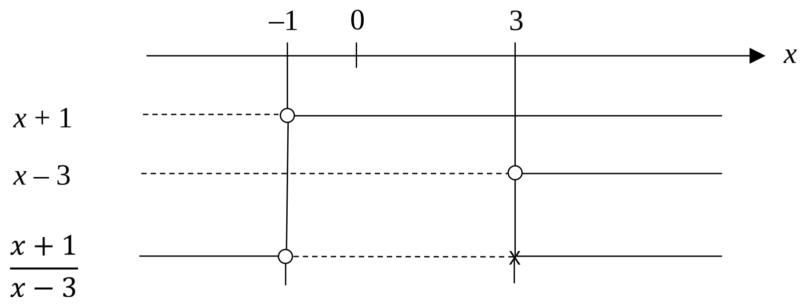
June 18, 2018

OPPGAVE 1

a) *Løs følgende ulikhet ved regning*:

$$\frac{x+1}{x-3} > 0$$

Denne kan vi løse ved å tegne fortegnsskjema. Vi tegner en fortegnslinje for telleren, en fortegnslinje for nevneren og kan da tegne en fortegnslinje for brøken som helhet:



Oppgaven er å finne hvor brøken er større enn 0, altså positiv.

Vi ser at brøken som helhet er positiv når x er mindre enn –1 eller større enn 3.

Svaret blir følgelig:

$$\underline{\underline{x < -1 \quad \vee \quad x > 3}}$$

b) *Løs følgende ligning ved regning, for* $x \in [0°, 360° >$:

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

Vi bruker abc-formelen. Her er $a = 2$, $b = -1$ og $c = -1$, og vi får da:

$$\cos x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

Vi har altså to muligheter:

$$\cos x = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

og

$$\cos x = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Den første muligheten, $\cos x = 1$, gir følgende løsninger:

$$x = \cos^{-1} 1 = 0° \qquad \vee \qquad x = 360° - 0° = 360°$$

Den siste vinkelen er eksplementvinkelen til den første, men vi ser at denne er utenfor definisjonsområdet (og det er også i praksis den samme vinkelen som 0°). Denne er derfor ikke en del av løsningen.

Den andre muligheten, $\cos x = -\frac{1}{2}$, gir følgende løsninger:

$$x = \cos^{-1}(-\tfrac{1}{2}) = 120° \qquad \vee \qquad x = 360° - 120° = 240°$$

Ligningen har altså følgende løsninger:

$$\underline{\underline{x = 0° \quad \vee \quad x = 120° \quad \vee \quad x = 240°}}$$

c) *Løs følgende ligning ved regning*:

$$x + 2 = \sqrt{3x + 10}$$

Denne løser vi ved å kvadrere begge sider. Vi får da

$$(x+2)^2 = (\sqrt{3x+10})^2$$

$$x^2 + 4x + 4 = 3x + 10$$

$$x^2 + 4x + 4 - 3x - 10 = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Vi bruker abc-formelen for å løse denne:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

Vi får altså to mulige løsninger:

$$x = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

og

$$x = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Ved kvadreringen kan vi ha innført falske løsninger, så vi må sette prøve på disse svarene.

$\underline{x = 2:}$
V.S: $2 + 2 = 4$
H.S: $\sqrt{3 \cdot 2 + 10} = \sqrt{6+10} = \sqrt{16} = 4$
Vi ser at vensre side er lik høyre side, så dette er en løsning av ligningen.

$\underline{x = -3:}$
V.S: $-3 + 2 = -1$
H.S: $\sqrt{3 \cdot (-3) + 10} = \sqrt{-9+10} = \sqrt{1} = 1$
Her ser vi at venstre side og høyre side er ulike. Dette er derfor en falsk løsning.

Løsningen av ligningen er derfor: $\underline{\underline{x = 2}}$

OPPGAVE 2

På en skole skal alle elevene ta pirquetprøve for å finne elever som har sykdommen tuberkulose. Vi kaller det en «positiv reaksjon» dersom pirquetprøven indikerer at eleven har tuberkulose.

Det er en kjent sak at pirquetprøver gir noen falske positive reaksjoner, dvs. at prøven tyder på tuberkulose selv om den som testes ikke er syk.

Ved tidligere utprøvinger har en funnet at 87 % av de som har tuberkulose får en positiv reaksjon på pirquetprøven (altså at de får en positiv reaksjon gitt at de har tuberkulose), mens 6 % av de friske også får en positiv reaksjon..

En vet også at 0,5 % av elevene i denne aldersgruppen har tuberkulose.

Det kan være lurt å definere følgende hendelser:

R: *eleven får en positiv reaksjon på pirquetprøven*

T: *eleven har tuberkulose*

a) *Finn sannsynligheten for at en vilkårlig elev får en positiv reaksjon på pirquetprøven.*

Vi skal altså finne $P(R)$.

De opplysningene som er gitt i oppgaven, er følgende:
87 % får positiv reaksjon gitt at de har tuberkulose:

$P(R|T) = 0,87$

6 % får positiv reaksjon gitt at de ikke har tuberkulose:

$P(R|\overline{T}) = 0,06$

0,5 % av elevene har tuberkulose:

$P(T) = 0,005$

Vi kan da finne $P(R)$ ved hjelp av setningen om total sannsynlighet:

$$P(R) = P(T) \cdot P(R|T) + P(\overline{T}) \cdot P(R|\overline{T})$$

Det eneste vi mangler her, er $P(\overline{T})$, men denne finner vi ved

$$P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0,005 = 0,995$$

Vi kan da regne ut sannsynligheten, og får

$$P(R) = 0,005 \cdot 0,87 + 0,995 \cdot 0,06 = 0,00435 + 0,0597 = 0,06405 \approx$$

$$\underline{\underline{0,064}}$$

b) *En elev som får positivt reaksjon på pirquetprøven, vil gjerne vite hvor stor sannsynligheten er for at han/hun virkelig har tuberkulose. Finn denne sannsynligheten.*

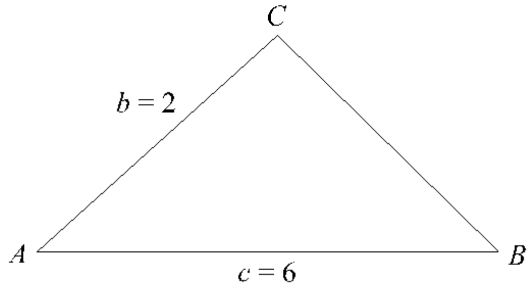
Det vi skal finne her, er $P(T|R)$. Denne kan vi finne ved Bayes' setning:

$$P(T|R) = \frac{P(T) \cdot P(R|T)}{P(R)} = \frac{0,005 \cdot 0,87}{0,06405} = 0,06792 \approx$$

$$\underline{\underline{0,068}}$$

OPPGAVE 3

Gitt følgende trekant:



Vinkel A er 30°.

a) *Finn arealet av trekanten.*

Arealet av en trekant er gitt ved

$$T = \tfrac{1}{2} bc \sin A$$

hvor b og c er to av sidene i trekanten, og A er disse sidenes mellomliggende vinkel.
Her får vi da

$$T = \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \sin 30° = \underline{\underline{3}}$$

b) *Finn vinkel B.*

Vi har ikke noen formel som gir oss B direkte. For å kunne finne den, må vi gå en omvei. Vi må først finne sidekanten $a = BC$. Den finner vi enklest ved cosinus-setningen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Setter vi inn tall, får vi

$$a^2 = 2^2 + 6^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \cos 30° = 40 - 24 \cdot 0,8660 = 19,2154$$

og

$$a = \sqrt{19,2154} = 4,3835$$

Nå kan vi finne B, for eksempel ved hjelp av sinus-setningen:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$$

Vi ganger på begge sider med b, og får

$$\sin B = \frac{\sin A}{a} \cdot b$$

Setter vi inn tall, får vi

$$\sin B = \frac{\sin 30}{4,3835} \cdot 2 = 0,2281$$

som gir

$$B = \sin^{-1} 0,2281 = 13,2^\circ \qquad \vee \qquad B = 180^\circ - 13,2^\circ = 166,8^\circ$$

Vi ser at supplementvinkelen $166,8^\circ$ ikke kan være en løsning, siden $A = 30^\circ$, slik at disse til sammen ville blitt $196,8^\circ$, og vinkelsummen i en trekant er 180°. Løsningen er følgelig

$$\underline{\underline{B = 13,2^\circ}}$$

Oppgave 4

Gitt to vektorer:

$$\vec{a} = [-3, 4]$$

$$\vec{b} = [2, 1]$$

a) *Finn lengden av disse vektorene.*

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = \underline{\underline{5}}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$$

b) *Finn skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$.*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-3) \cdot 2 + 4 \cdot 1 = -6 + 4 = \underline{\underline{-2}}$$

c) *Finn vinkelen mellom vektorene.*

Vinkelen kan vi finne ved å bruke skalarproduktet:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Løser vi denne med hensyn på $\cos(\vec{a}, \vec{b})$, får vi

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Setter vi inn tall, får vi

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{-2}{5 \cdot \sqrt{5}} = -0,17889$$

og følgelig

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1}(-0,17889) = \underline{\underline{100,3°}}$$

d) *En linje, l, går gjennom punktet $(2,4)$ og har $\vec{a}$ som retningsvektor.*

Finn en parameterfremstilling for l.

Denne kan vi skrive opp uten å regne ut noe. Tallene foran t-ene henter vi fra koordinatene til retningsvektoren, altså fra $\vec{a} = [-3,4]$, mens konstantleddene henter vi fra koordinatene til det kjente punktet på linja, nemlig $(2,4)$. Vi får da:

$$\underline{\underline{x = -3t + 2 \quad \wedge \quad y = 4t + 4}}$$

OPPGAVE 5

a) *Løs følgende ligning ved regning*:

$$e^{10x} = 50$$

Denne løser vi ved å ta den naturlige logaritmen på begge sider av likhetstegnet:

$$\ln e^{10x} = \ln 50$$

$$10x = \ln 50$$

$$\underline{\underline{x = \frac{\ln 50}{10}}} \approx 0,3912$$

b) *En bil reduseres i verdi med 15 % i året. Hvor lang tid tar det før kun halve verdien gjenstår?*

Hvis vi kaller bilens verdi ved starten K_0, kan vi skrive verdien etter ett år som

$$K_1 = 0,85 \cdot K_0$$

etter to år

$$K_2 = 0,85 \cdot K_1 = 0,85 \cdot (0,85 \cdot K_0) = 0,85^2 K_0$$

osv. Etter n år er verdien

$$K_n = 0,85^n K_0$$

Vi skal så finne hvilken n som gjør at K_n blir $\frac{1}{2}K_0$, altså halve startverdien:

$$K_n = \tfrac{1}{2}K_0$$

Så setter vi inn at $K_n = 0,85^n K_0$, og får

$$0,85^n K_0 = \tfrac{1}{2}K_0$$

Vi deler begge sider på K_0, og får

$$0,85^n = \tfrac{1}{2}$$

Så tar vi logaritmen på begge sider, og får

$$\ln 0,85^n = \ln \tfrac{1}{2}$$

Vi bruker regelen $\ln a^b = b \ln a$, og får

$$n \ln 0,85 = \ln \tfrac{1}{2}$$

Så deler vi begge sider på $\ln 0,85$:

$$n = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln 0,85} \approx 4,27$$

Følgelig:

Det går litt over 4 år før bilens verdi er halvert.

OPPGAVE 6

a) *Finn den deriverte av følgende funksjon*:

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x}$$

Vi kan skrive om funksjonen slik at det blir lettere å derivere:

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x} = \left(3x^2 + 4x\right)^{\frac{1}{2}}$$

Her må vi bruke kjerneregelen derivasjonen, og får:

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}\left(3x^2 + 4x\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2 + 4x)' = \tfrac{1}{2}\left(3x^2 + 4x\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3 \cdot 2x + 4) =$$

$$\frac{6x+4}{2\left(3x^2+4x\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\cancel{2}(3x+2)}{\cancel{2}\left(3x^2+4x\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3x+2}{\left(3x^2+4x\right)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\underline{\underline{\frac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x}}}}$$

b) *Finn den deriverte av følgende funksjon*:

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + e^x$$

Her kan vi skrive om slik:

$$f(x) = 4x^{-\frac{1}{2}} + e^x$$

Vi får da

$$f'(x) = 4 \cdot (-\tfrac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}-1} + e^x = \underline{\underline{-2x^{-\frac{3}{2}} + e^x}}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} + e^x}}$$

c) *Finn følgende integral*:

$$\int_0^3 \left(x^4 + 3^x\right) dx$$

Vis utregningen din. Integralet skal regnes ut uten å bruke kalkulatoren til å integrere.

Her må vi bruke følgende integrasjonsregler:

$$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$$

og

$$\int a^x\,dx = \tfrac{1}{\ln a}a^x + C$$

Vi får da

$$\int_0^3 \left(x^4 + 3^x\right) dx = \left[\tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{\ln 3}3^x\right]_0^3 =$$

$$\tfrac{1}{5}3^5 + \tfrac{1}{\ln 3}3^3 - \left(\tfrac{1}{5}0^5 + \tfrac{1}{\ln 3}3^0\right) =$$

$$\frac{243}{5} + \frac{27}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} =$$

$$\underline{\underline{\frac{243}{5} + \frac{26}{\ln 3} \approx 72.3}}$$

Oppgave 7

Vi har funksjonen

$$f(x) = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 - 6x$$

a) *Finn $f'(x)$ og $f''(x)$ ved regning.*

$$f'(x) = \tfrac{1}{3} \cdot 3x^{3-1} - \tfrac{1}{2} \cdot 2x^{2-1} - 6 = \underline{\underline{x^2 - x - 6}}$$

$$f''(x) = \underline{\underline{2x - 1}}$$

b) *Finn ved regning eventuelle toppunkter, bunnpunkter og vendepunkter for funksjonen. (Det er tilstrekkelig å finne x-verdiene – du trenger ikke å regne ut funksjonsverdiene i disse punktene.)*

Toppunkter og bunnpunkter finner vi ved å undersøke hvor den deriverte er null og hvordan fortegnet er mellom disse nullpunktene:

$$f'(x) = 0$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$

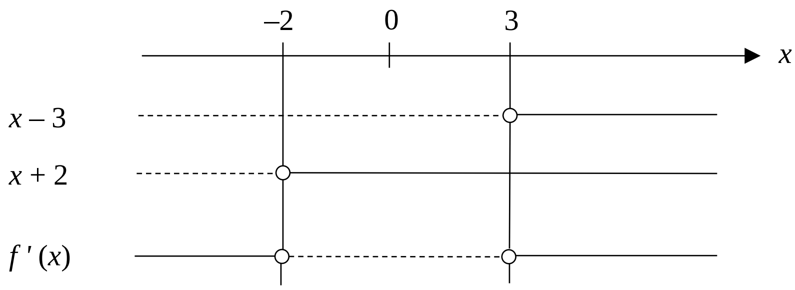
Vi bruker abc-formelen for å finne løsningene:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \vee \quad x = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Dette viser to ting: funksjonen har ekstremalverdier for $x = 3$ og $x = -2$, og den deriverte kan faktoriseres på følgende måte: $f'(x) = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$.

Vi drøfter fortegnet til $f'(x)$ ved hjelp av et fortegnsskjema:



Vi ser at den deriverte er positiv opp til –2, negativ mellom –2 og 3 og igjen positiv når x er større enn 3.

Dette innebærer at funksjonen er voksende opp til $x = –2$, og at den deretter avtar. Følgelig har funksjonen et

toppunkt (maksimum) for $x = –2$.

Videre innebærer fortegnet til den deriverte at funksjonen avtar mellom $x = –2$ og $x = 3$, og at den deretter vokser. Dette betyr at funksjonen har et

bunnpunkt (minimum) for $x = 3$.

Funksjonen har vendepunkter der den annenderiverte bytter fortegn. Dette kan den gjøre der den annenderiverte er 0:

$f''(x) = 0$

$2x – 1 = 0$

$2x = 1$

$x = ½$

Siden $f''(x)$ er en rett linje, vil den bytte fortegn i nullpunktet, og vi kan konkludere at funksjonen har et

vendepunkt for $x = ½$.