Høgskolen i Østfold

16. juni 2017

EKSAMEN – løsningsforslag

Emnekode: ITFKMAT11	**Emnenavn:** Forkurs i matematikk
Dato: 15. juni 2017	**Eksamenstid:** 17.00 – 21.00
Hjelpemidler: • Kalkulator • Valgfri formelsamling i matematikk Studentene har lov til å føre inn egne notater i formelsamlingen, men ikke slik at antall sider i heftet øker, og det er heller ikke lov å overskrive formler/tekst som man ikke trenger. Det er også lov å lime inn trykt tekst under ovennevnte begrensninger, men det man limer inn må være egenprodusert.	**Faglærer:** Christian F Heide
Om eksamensoppgaven og poengberegning: Oppgavesettet består av 4 sider inklusiv denne forsiden. Kontroller at oppgavesettet komplett. Oppgavesettet består av 7 oppgaver med totalt 18 delspørsmål. Alle delspørsmål teller i utgangspunktet like mye. Karakteren settes allikevel ut fra en helhetsvurdering.	
Sensurfrist: 30. juni 2016	

Oppgave 1

a) *Løs følgende likning ved regning:*

$$x+2=\sqrt{5x+16}$$

Vi kvadrerer begge sider:

$$(x+2)^2=(\sqrt{5x+16})^2$$

Så regner vi ut og ordner:

$$(x+2)(x+2)=5x+16$$

$$x^2+4x+4=5x+16$$

$$x^2+4x+4-5x-16=0$$

$$x^2-x-12=0$$

Vi bruker så *abc*-formelen for å løse denne:

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{1\pm 7}{2}$$

Dette gir løsningene

$$x=\frac{1+7}{2}=\frac{8}{2}=4 \quad \vee \quad x=\frac{1-7}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$

Vi må sette prøve på disse for å se om de er falske løsninger:

$\underline{x = 4}$:

V.S: $4+2=6$

H.S: $\sqrt{5\cdot 4+16}=\sqrt{20+16}=\sqrt{36}=6$

Vi ser at venstre side og høyre side er like, og $x = 4$ er derfor en løsning av ligningen.

$\underline{x=-3}$:

V.S: $-3+2=-1$

H.S: $\sqrt{5\cdot(-3)+16} = \sqrt{-15+16} = \sqrt{1} = 1$

Vi ser at venstre side og høyre side er ulike, og $x = -3$ er derfor en falsk løsning.

Løsningen av ligningen er følgelig

$$\underline{\underline{x = 4}}$$

b) *Løs følgende ulikhet ved regning*:

$$2x+3 < 4x-1$$

Vi ordner ulikheten:

$$2x-4x < -1-3$$

$$-2x < -4$$

Så deler vi begge sider med –2, men må da huske å snu ulikhetstegnet:

$$x > \frac{-4}{-2}$$

og altså

$$\underline{\underline{x > 2}}$$

c) *Løs følgende ligning ved regning, for* $x \in [0°, 360°\rangle$:

$$\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$$

Vi bruker *abc*-formelen for å løse denne:

$$\sin x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

Vi får altså

$$\sin x = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \vee \quad \sin x = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Siden sinus til en vinkel alltid er et tall i intervallet $[-1, 1]$, er sin x = 2 ikke en mulig løsning. Løsningene til ligningen er derfor gitt ved $\sin x = 1$ som gir

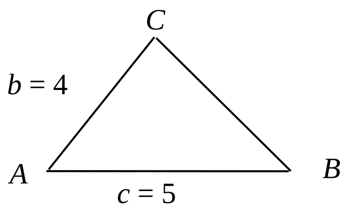
$$x = \sin^{-1} 1 = 90°$$

Generelt sett vil også supplementvinkelen være en løsning, men her er supplementvinkelen $180° - 90° = 90°$. Ligningen har følgelig kun løsningen

$$\underline{\underline{x = 90°}}$$

Oppgave 2

Gitt følgende trekant ABC (figuren er bare en hjelpefigur og ikke en nøyaktig tegning av trekanten):



Vinkel A er 40°.

a) *Finn arealet av trekanten*.

Arealsetningen sier

$$T = \tfrac{1}{2} bc \sin A = \tfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin 40° = \underline{\underline{6.4}}$$

b) *Regn ut lengden av BC*.

Sidekant BC kan vi også betegne *a* fordi den er motstående side til vinkel *A*. Vi kan finne denne på flere måter, men jeg velger å løse den ved å bruke cosinussetningen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 40° = 10.3582$$

Dette gir

$$a = \sqrt{10.3582} = \underline{\underline{3.2}}$$

Oppgave 3

a) *Løs følgende ligning ved regning*:

$$4 \ln x = 16$$

Vi deler begge sider med 4 og får:

$$\ln x = 4$$

Så eksponentierer vi begge sider, og får

$$e^{\ln x} = e^4$$

Når e og ln står inntil hverandre, opphever de virkningen av hverandre fordi de er inverse funksjoner. Vi får derfor

$$\underline{\underline{x = e^4}}$$

b) *Vi setter 10 000 kr i banken. Den årlige renten er 1.5 %. Hvor mange år tar det før vi har økt innestående beløp til 15 000 kr.*

Innestående beløp etter n år, er

$$K_n = 10\,000 \cdot 1.015^n$$

Vi kan så finne hvilket antall år det er som gjør at dette uttrykket blir 15 000:

$$10\,000 \cdot 1.015^n = 15\,000$$

Vi deler på 10 000 på begge sider, og får

$$1.015^n = 1.5$$

Så tar vi logaritmen på begge sider:

$$\ln(1.015^n) = \ln 1.5$$

Her kan vi bruke regelen som sier at $\ln a^b = b \cdot \ln a$. Gjør vi det, får vi

$$n \cdot \ln 1.015 = \ln 1.5$$

Vi deler på begge sider med $\ln 1.015$:

$$n = \frac{\ln 1.5}{\ln 1.015} = 27.23$$

<u>Det tar 27.2 år før beløpet har øket til 15 000</u>.

Oppgave 4

a) *Finn den deriverte av* $f(x) = \ln x + \sqrt{x}$

$$f'(x) = (\ln x + \sqrt{x})' = (\ln x)' + (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \underline{\underline{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \underline{\underline{\frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}}}$$

b) *Finn den deriverte av* $f(x) = \left(x^2 + 2\right)^4$

$$f'(x) = \left(\left(x^2 + 2\right)^4\right)' = 4(x^2 + 2)^{4-1} \cdot (x^2 + 2)' = 4(x^2 + 2)^3 \cdot 2x =$$

$$= \underline{\underline{8x(x^2 + 2)^3}}$$

c) *Regn ut* $\int_1^2 (x^2 + 3x + \frac{1}{x^2})\, dx$

$$\int_1^2 (x^2 + 3x + \frac{1}{x^2})\, dx = \int_1^2 (x^2 + 3x + x^{-2})\, dx =$$

$$\left[\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - x^{-1}\right]_1^2 =$$

$$\tfrac{1}{3} \cdot 2^3 + \tfrac{3}{2} \cdot 2^2 - 2^{-1} - (\tfrac{1}{3} \cdot 1^3 + \tfrac{3}{2} \cdot 1^2 - 1^{-1}) =$$

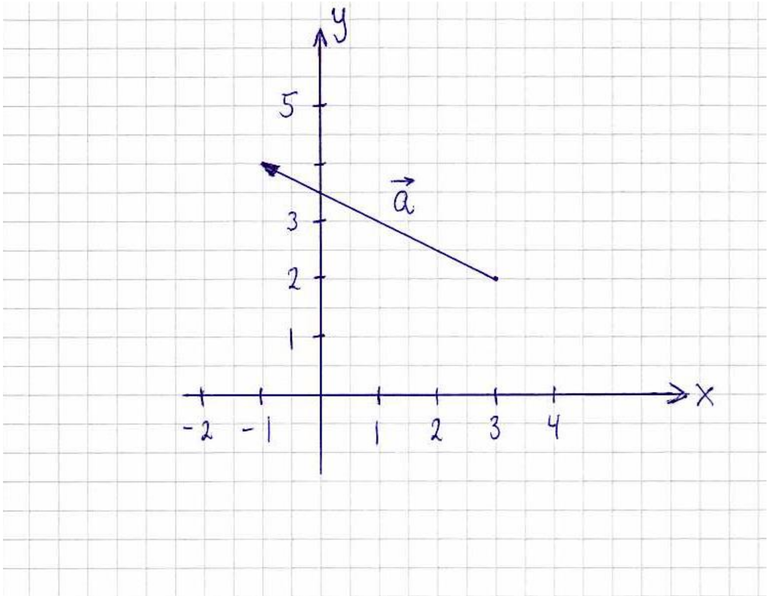
$$\tfrac{1}{3} \cdot 8 + \tfrac{3}{2} \cdot 4 - \tfrac{1}{2} - (\tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{2} - 1) =$$

$$\tfrac{8}{3} + \tfrac{12}{2} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{2} + 1 =$$

$$\underline{\underline{\frac{22}{3}}}$$

Oppgave 5

Vektor $\vec{a}$ *er gitt på figuren nedenfor.*



a) *Skriv $\vec{a}$ på koordinatform.*

Her kan vi finne vektorkoordinatene ved å telle. Vi ser at for å komme fra begynnelsen av vektoren til enden av vektoren, må vi gå 4 skritt til venstre og 2 skritt oppover. Følgelig:

$$\underline{\underline{\vec{a} = [-4,\ 2]}}$$

b) *Gitt to andre vektorer $\vec{b} = [3,\ 6]$ og $\vec{c} = [-1,\ 2]$. Regn ut lengdene av $\vec{b}$ og $\vec{c}$.*

Lengdene er gitt ved

$$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9+36} = \underline{\underline{\sqrt{45}}} \approx 6.7$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \underline{\underline{\sqrt{5}}} \approx 2.2$$

c) *Regn ut vinkelen mellom $\vec{b}$ og $\vec{c}$.*

For å regne ut dette, kan vi bruke skalarproduktet mellom vektorene:

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 3 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 = -3 + 12 = 9$$

Skalarprodukt er definert ved

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\left(\vec{b}, \vec{c}\right)$$

Denne kan omformes til

$$\cos\left(\vec{b},\vec{c}\right)=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|}=\frac{9}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{5}}=0.60$$

og følgelig

$$\left(\vec{b},\vec{c}\right)=\cos^{-1}0.60=\underline{\underline{53.1^\circ}}$$

d) *En linje, l, har* $\vec{c}$ *som retningsvektor og går gjennom punktet* (2, –3).

Bestem en parameterfremstilling for linjen l.

En parameterfremstilling for *l* kan vi lese rett ut av opplysningene i oppgaven:

$$\underline{\underline{x=-t+2 \quad \wedge \quad y=2t-3}}$$

Oppgave 6

a) *På en liten skole, er det 25 elever på et klassetrinn. 15 av disse elevene tar matematikk. Vi trekker ut en tilfeldig elev fra dette klassetrinnet.*
Hva er sannsynligheten for at den uttrukne eleven ikke *tar matematikk*?

Det er ofte ryddig å definere hendelser når vi regner på sannsynligheter. Her kan vi definere hendelsen

M: den uttrukne eleven tar matematikk.

Dette innebærer at den komplementære hendelsen er

$\overline{M}$: den uttrukne eleven tar ikke matematikk.

Det er 25 – 15 = 10 elever på dette klassetrinnet som ikke tar matematikk.
Sannsynligheten for at den uttrukne eleven ikke tar matematikk, er derfor

$$P(\overline{M})=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}=\underline{\underline{0.4}}$$

b) *På dette klassetrinnet er det 12 som tar fysikk, mens 10 av elevene tar både fysikk og matematikk. Vi går inn i en fysikktime og plukker ut tilfeldig en elev.*
Hva er sannsynligheten for at denne eleven tar matematikk, når vi altså vet at han/hun tar fysikk?

Vi kan definere hendelsen

F: den uttrukne eleven tar fysikk.

Det vi skal finne her den betingede sannsynligheten $P(M\mid F)$.

Dette kan vi enklest finne ved å regne antall gunstige på mulige utfall. Siden vi er i en fysikktime, vet vi at det er 12 elever i klassen. 10 av disse tar også matematikk, og sannsynligheten blir derfor

$$P(M \mid F) = \frac{10}{12} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}} \approx 0.83$$

Alternativt kan vi benytte setningen om betinget sannsynlighet, som sier

$$P(M \mid F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)}$$

Her er $P(M \cap F)$ sannsynligheten for at eleven tar både matte og fysikk, og den er gitt ved

$$P(M \cap F) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

fordi det er 10 som tar både matte og fysikk og totalt 25 elever. Videre er det 12 som tar fysikk, og følgelig har vi

$$P(F) = \frac{12}{25}$$

Bruker vi dette får vi

$$P(M \mid F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{12}{25}} = \frac{\frac{2}{5} \cdot 25}{\frac{12}{25} \cdot 25} = \frac{2 \cdot 5}{12} = \frac{10}{12} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$$

Oppgave 7

Vi har en funksjon

$$f(x) = x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 6x + 3$$

a) *Finn $f'(x)$ og $f''(x)$ ved regning.*

$$f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} + \tfrac{3}{2} \cdot 2 \cdot x^{2-1} - 6 = \underline{\underline{3x^2 + 3x - 6}}$$

$$\underline{\underline{f''(x) = 6x + 3}}$$

b) *Finn ved regning eventuelle toppunkter, bunnpunkter og vendepunkter for funksjonen.*

Funksjonen kan ha lokale ekstremalverdier (topp- og bunnpunkter) der den deriverte er 0:

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 + 3x - 6 = 0$$

Hvis vi vil, kan vi først dele hele ligningen med 3 for å få mindre tall å regne med:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

Dette gir

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

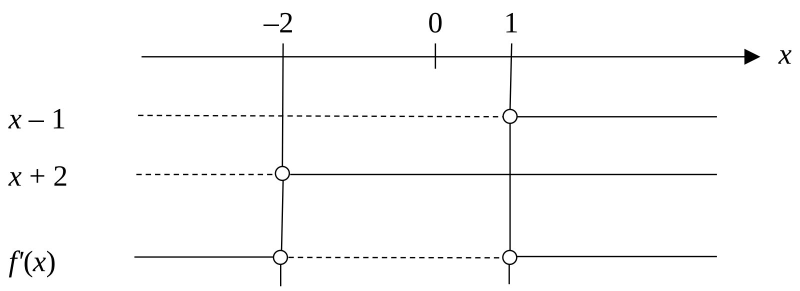
og altså

$$x = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \vee \quad x = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Dette betyr at den deriverte kan skrives

$$f'(x) = 3(x-1)(x+2)$$

Vi kan så tegne fortegnsskjema for dette uttrykket:



Funksjonen er voksende der den deriverte er positiv. Av fortegnsskjemaet ser vi at dette skjer når x er mindre enn –2 og når x er større enn 1. Når x er mellom –2 og 1 er funksjonen er avtagende.

Dette betyr at funksjonen har et toppunkt for $x = -2$, og et bunnpunkt for $x = 1$.

Funksjonen har vendepunkter der den annenderiverte bytter fortegn:

$$f''(x) = 6x + 3$$

$$6x + 3 = 0$$

$$6x = -3$$

$$x = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Siden den annenderiverte er et førstegradsuttrykk må den bytte fortegn der den er 0. Følgelig:

Funksjonen har vendepunkt for $\underline{\underline{x = -\frac{1}{2}}}$.