

Forkurs i matematikk

7. juni 2016

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) $\sqrt{x+8} = x+2$

Kvadrerer begge sider:

$$\sqrt{x+8}^2 = (x+2)^2$$

$$x+8 = x^2 + 4x + 4$$

$$0 = x^2 + 4x + 4 - x - 8$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

(2)

$$x = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = \underline{1} \quad \vee \quad x = \frac{-3-5}{2} = \frac{-8}{2} = \underline{-4}$$

Vi setter prøve på svaret for å sjekke for falske løsninger:

$$\underline{x = 1:}$$

$$\text{V.S: } \sqrt{1+8} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{H.S: } 1+2 = 3$$

OK

$$\underline{x = -4:}$$

$$\text{V.S: } \sqrt{-4+8} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{H.S: } -4+2 = -2$$

Dette er en falsk løsning. Følgelig er løsningen av ligningen

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

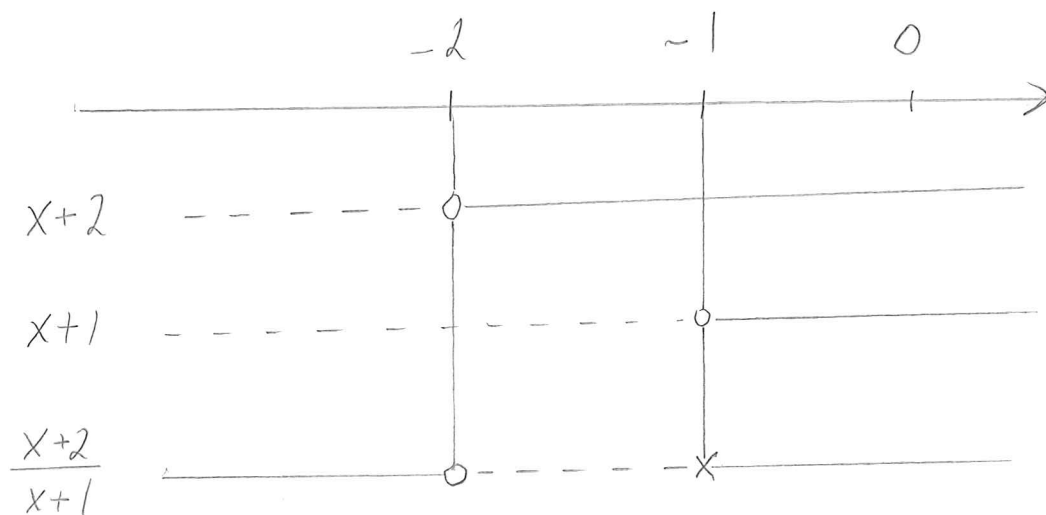
$$b) \quad \frac{3x+4}{x+1} < 2$$

$$\frac{3x+4}{x+1} - 2 < 0$$

$$\frac{3x+4}{x+1} - \frac{2 \cdot (x+1)}{x+1} < 0$$

$$\frac{3x+4-2x-2}{x+1} < 0$$

$$\frac{x+2}{x+1} < 0$$



$$\underline{\underline{-2 < x < -1}}$$

Oppgave 2

$$f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - 24x + 4$$

$$\begin{aligned} a) \quad f'(x) &= 3 \cdot \frac{4}{3}x^2 - 2 \cdot 2x - 24 \\ &= \underline{\underline{4x^2 - 4x - 24}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(4) &= 4 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 - 24 \\ &= 64 - 16 - 24 = \underline{\underline{24}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad f''(x) &= (4x^2 - 4x - 24)' \\ &= 2 \cdot 4x - 4 \\ &= \underline{\underline{8x - 4}} \end{aligned}$$

c) Toppunkter og bunnpunkter finner vi der den deriverte er 0:

(5)

$$f'(x) = 0$$

$$4x^2 - 4x - 24 = 0 \quad | : 4$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

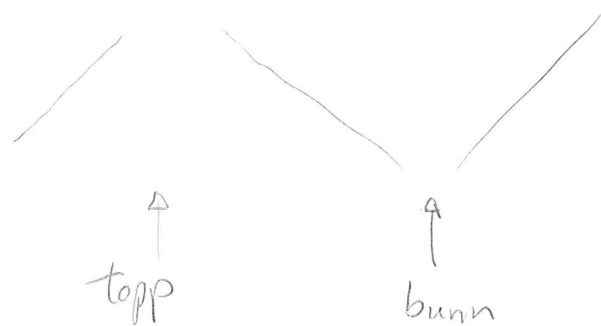
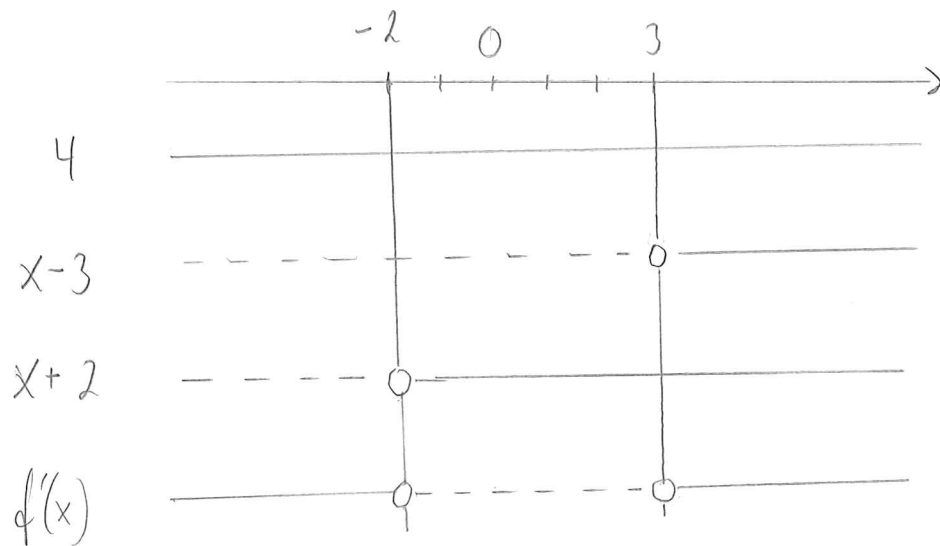
$$x = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = \underline{3} \quad \vee \quad x = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = \underline{-2}$$

Dette betyr at vi kan faktorisere den deriverte slik:

$$f'(x) = 4x^2 - 4x - 24 = 4 \cdot (x-3)(x+2)$$

Tegner fortegnsskjema for denne:

(6)



Vi ser av fortegnsskjemaet at funksjonen har toppunkt for $x = -2$ og bunnpunkt for $x = 3$.

$$\begin{aligned} f(-2) &= \frac{4}{3} \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 - 24 \cdot (-2) + 4 \\ &= -\frac{32}{3} - 8 + 48 + 4 = -\frac{32}{3} + \frac{132}{3} = \underline{\underline{\frac{100}{3}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{4}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 + 4 \\ &= 36 - 18 - 72 + 4 = \underline{\underline{-50}} \end{aligned}$$

Oppsummert

Funksjonen har toppunkt i $(-2, \frac{100}{3})$ og

bunnpunkt i $(3, -50)$

Oppgave 3

$$a) f(x) = \sqrt{x^3 + 4} = (x^3 + 4)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (x^3 + 4)^{\frac{1}{2} - 1} \cdot (x^3 + 4)'$$

$$= \frac{1}{2} (x^3 + 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2$$

$$= \frac{\frac{3x^2}{2} (x^3 + 4)^{-\frac{1}{2}}}{1} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 4}}$$

$$b) g(x) = \frac{x^2 + 5}{4x}$$

Regelen for derivasjon av en brøk:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Dette gir

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \frac{2x \cdot 4x - (x^2+5) \cdot 4}{(4x)^2} = \frac{8x^2 - 4x^2 - 20}{16x^2} \\
 &= \frac{4x^2 - 20}{16x^2} = \frac{4(x^2 - 5)}{4 \cdot 4x^2} = \underline{\underline{\frac{x^2 - 5}{4x^2}}}
 \end{aligned}$$

Oppgave 4

$$a) \int \frac{2}{x^2} dx = 2 \int \frac{1}{x^2} dx = 2 \cdot \int x^{-2} dx$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{-1} x^{-1} + C = \underline{\underline{-2x^{-1} + C}}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{2}{x} + C}}$$

$$b) \int_2^4 (x^3 + 3x^2) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 \right]_2^4$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 4^4 + 4^3 - \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 2^3 \right)$$

$$= 64 + 64 - 4 - 8 = \underline{\underline{116}}$$

Oppgave 5

9

a) Vinkel B finner vi ved å bruke cosinus-setningen:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

Løser vi denne med hensyn på $\cos B$, får vi

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Setter vi inn tall, får vi

$$\cos B = \frac{5^2 + 6^2 - 3^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = 0,8667$$

$$B = \cos^{-1} 0,8667 = \underline{\underline{29,9^\circ}}$$

$$b) \quad T_{ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin 29,9^\circ$$

$$= \underline{\underline{7,48}}$$

Oppgave 6

$$A(1,4), B(-1,5), C(3,2)$$

$$a) \quad \vec{BA} = [1 - (-1), 4 - 5] = \underline{\underline{[2, -1]}}$$

$$\vec{BC} = [3 - (-1), 2 - 5] = \underline{\underline{[4, -3]}}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \vec{BA} + \vec{BC} &= [2, -1] + [4, -3] \\ &= [2+4, -1-3] = \underline{\underline{[6, -4]}} \end{aligned}$$

c) Avstanden mellom punktene A og B er lik lengden av vektor $\vec{BA}$:

$$|\vec{BA}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$$

$$d) \quad \vec{BA} \cdot \vec{BC} = [2, -1] \cdot [4, -3]$$

$$= 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) = 8 + 3 = \underline{\underline{11}}$$

e) Vinkelen mellom $\vec{BA}$ og $\vec{BC}$ er gitt ved

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = |\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos B$$

$$\cos B = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|}$$

$\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ fant vi i forrige spørsmål at
var 11.

$|\vec{BA}|$ fant vi i spørsmål c at er $\sqrt{5}$.

Vi må finne $|\vec{BC}|$:

$$|\vec{BC}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

Vi kan nå finne vinkelen:

$$\cos B = \frac{11}{\sqrt{5} \cdot 5} = 0.9839$$

$$B = \cos^{-1} 0.9839 = \underline{\underline{10.3^\circ}}$$

Oppgave 7

- a) Dersom verdien øker med 20% pr. år, må vi gange årets verdi med $1 - 0.2 = 0.8$ for å finne neste års verdi. Funksjonen blir derfor

$$\underline{\underline{V(t) = 650\,000 \cdot 0.8^t}}$$

- b) Tiden det tar for verdien er halvert er den t som gir at
- $$650\,000 \cdot 0.8^t = 325\,000$$

Delar vi med 650 000 på begge sidor,
får vi

$$0.8^t = \frac{325\,000}{650\,000} = \frac{1}{2}$$

Tar vi så logaritmen på begge sidor, får vi

$$\ln 0.8^t = \ln \frac{1}{2}$$

$$t \cdot \ln 0.8 = \ln \frac{1}{2} \quad | : \ln 0.8$$

$$t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln 0.8} = \underline{3.106}$$

Det tar 3.1 år för verdien er halvert.

Oppgave 8

a) Dette er et utvalg uten tilbakelegging siden en person som er valgt til å være med i styret ikke kan velges en gang til til å være med i det samme styret. Dersom det ikke er noen spesielle roller i styret, er dette et uordnet utvalg. Antall ulike styrer som kan velges, er da gitt ved

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

hvor $n=16$ og $k=4$. Dette gir

$$\begin{aligned} \frac{16!}{(16-4)!4!} &= \frac{16!}{12!4!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{12! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \underline{\underline{1820}} \end{aligned}$$

b) Dette blir et ordnet utvalg uten tilbakelegging:

(15)

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{16!}{(16-4)!} = \frac{16!}{12!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \cancel{12!}}{\cancel{12!}}$$

$$= \underline{\underline{43680}}$$