

FORKURS I MATEMATIKK

EKSAMEN 4. JUNI 2015

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

Ved en inflasjon på 3% pr. år, vil pengene etter ett år være verdt 97% av opprinnelig verdi, altså

$$100.000 \cdot \frac{97}{100} = 100.000 \cdot 0.97$$

Etter to år vil verdien være 97% av dette igjen, altså

$$(100.000 \cdot 0.97) \cdot 0.97 = 100.000 \cdot 0.97^2$$

Etter t år vil verdien være

$$100.000 \cdot 0.97^t$$

Når pengenes verdi er halvert vil de være verdt 50.000. Dette vi skje etter en tid t gitt ved

(2)

$$100.000 \cdot 0.97^t = 50.000$$

Vi løser denne ved først å dele med 100.000 på begge sider (husk at 50.000 delt på 100.000 er $\frac{1}{2}$):

$$0.97^t = \frac{1}{2}$$

Så tar vi logaritmen på begge sider:

$$\ln 0.97^t = \ln \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$t \cdot \ln 0.97 = \ln \frac{1}{2} \quad | : \ln 0.97$$

$$\Downarrow$$

$$t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln 0.97} = \underline{\underline{22.8}}$$

Verdien av pengene vil være halvert etter 22.8 år.

Oppgave 2

$A(-3, -2)$, $B(2, -1)$, $C(0, 4)$ og $D(-2, 3)$.

$$a) \quad \vec{AB} = [2 - (-3), -1 - (-2)] = [2+3, -1+2] \\ = \underline{\underline{[5, 1]}}$$

$$\vec{AD} = [-2 - (-3), 3 - (-2)] = [-2+3, 3+2] \\ = \underline{\underline{[1, 5]}}$$

$$b) \quad \vec{AB} \cdot \vec{AD} = [5, 1] \cdot [1, 5] = 5 \cdot 1 + 1 \cdot 5 = \underline{\underline{10}}$$

c) For å finne vinkel A må vi først finne lengdene av vektorene $\vec{AB}$ og $\vec{AD}$:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

$$|\vec{AD}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

(4)

Vinkel A kan vi da finne ved hjelp av skalarproduktet:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| \cdot \cos A$$

$$\Downarrow$$

$$\cos A = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}|}$$

Skalarproduktet fant vi i forrige delspørsmål at er 10. Vi får derfor

$$\cos A = \frac{10}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{26}} = 0,3846$$

$$\Downarrow$$

$$A = \cos^{-1} 0,3846 = \underline{\underline{67,4^\circ}}$$

d) Arealit av en trekant er halparten av produktet av to av sidene og sinus til deres mellomliggende vinkel:

$$T = \frac{1}{2} ab \sin C$$

(5)

Her kan vi bruke AB og AD som de to sidene
og A som deres mellomliggende vinkel, og får

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| \cdot \sin A \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{26} \cdot \sin 67.4^\circ \\ &= \underline{\underline{12.0}} \end{aligned}$$

- e) For å kunne finne en parameterfremstilling for en rett linje, trenger vi en rettningsvektor for linja og et kjent punkt på linja. Siden l går gjennom A og B vil $\vec{AB}$ være en rettningsvektor og som kjent punkt kan vi bruke A eller B . Jeg velger A . Altså:

$$A(-3, -2) \quad \text{og} \quad \vec{AB} = [5, 1]$$

En parameterfremstilling vil da være

$$\underline{\underline{x = 5t - 3 \quad \wedge \quad y = t - 2}}$$

6

d) Vi må sjekke om enten vektorene $\vec{AB}$ og $\vec{CO}$ er parallelle, eller om $\vec{AO}$ og $\vec{BC}$ er parallelle.

Dersom $\vec{AB}$ og $\vec{CO}$ er parallelle så finnes det et tall k slik at

$$\vec{AB} = k \cdot \vec{CO}$$

$$\vec{CO} = [-2-0, 3-4] = [-2, -1]$$

$$\vec{AB} = [5, 1]$$

$$[5, 1] = k[-2, -1]$$

$\Updownarrow$

$$5 = -2k \wedge 1 = -k$$

$\Updownarrow$

$$\underline{k = -\frac{5}{2} \wedge k = -1}$$

Vi ser at det ikke finnes et tall k slik at $\vec{AB} = k \cdot \vec{CO}$. Disse vektorene er derfor ikke parallelle.

Vi må så sjekke om

$$\vec{AD} = k \cdot \vec{BC}$$

$$\vec{AD} = [1, 5]$$

$$\vec{BC} = [0 - 2, 4 - (-1)] = [-2, 5]$$

$$[1, 5] = k \cdot [-2, 5]$$



$$1 = -2k \wedge 5 = 5k$$



$$k = -\frac{1}{2} \wedge k = 1$$

Vi ser at heller ikke disse er parallelle.

Følgelig:

ABCD er ikke et trapes.

Oppgave 3

$$2\cos^2 x - \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{8} = \cos^2 x$$

$$\Updownarrow$$

$$2\cos^2 x - \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{8} - \cos^2 x = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos^2 x - \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{8} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos x = \frac{-(-\frac{1}{4}) \pm \sqrt{(-\frac{1}{4})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\frac{1}{8})}}{2 \cdot 1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos x = \frac{\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{4}{8}}}{2} = \frac{\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}}}{2} = \frac{\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos x = \frac{\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos x = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{\frac{4}{4}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\vee$$

$$\cos x = \frac{\frac{1}{4} - \frac{3}{4}}{2} = \frac{-\frac{2}{4}}{2} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$$

(9)

$$x = \cos^{-1} \frac{1}{2} = 60^\circ \vee x = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ \vee$$

$$x = \cos^{-1}(-\frac{1}{4}) = 104.5^\circ \vee x = 360^\circ - 104.5^\circ = 255.5^\circ$$

Løsningene på ligningen er altså

$$\underline{\underline{x = 60^\circ \vee x = 104.5^\circ \vee x = 255.5^\circ \vee x = 300^\circ}}$$

Oppgave 4

$$\frac{-x-1}{x+3} < -2$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{-x-1}{x+3} + 2 < 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{-x-1}{x+3} + 2 \cdot \frac{x+3}{x+3} < 0$$

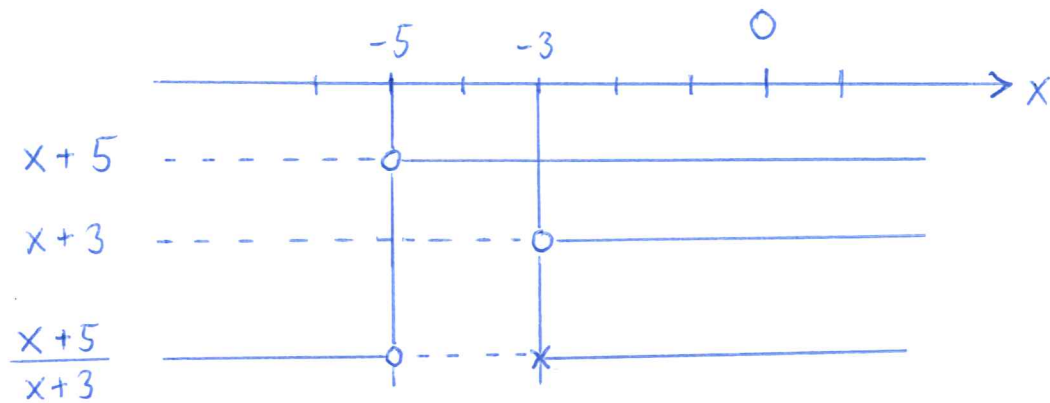
$$\Updownarrow$$

$$\frac{-x-1+2x+6}{x+3} < 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x+5}{x+3} < 0$$

Vi tegner fortegnsskjema for brøken:



Av fortegnsskjemaet ser vi at løsningen på ulikheten er

$$\underline{\underline{-5 < x < -3}}$$

Oppgave 5

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x$$

$$a) f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}x^{3-1} + 2 \cdot \frac{1}{2}x^{2-1} - 12$$

$$= \underline{\underline{x^2 + x - 12}}$$

$$f'(4) = 4^2 + 4 - 12 = 16 + 4 - 12 = \underline{\underline{8}}$$

$$b) f''(x) = (x^2 + x - 12)' = \underline{\underline{2x + 1}}$$

c) Toppunkter og bunnpunkter finner vi der den deriverte er 0:

$$f'(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2}$$

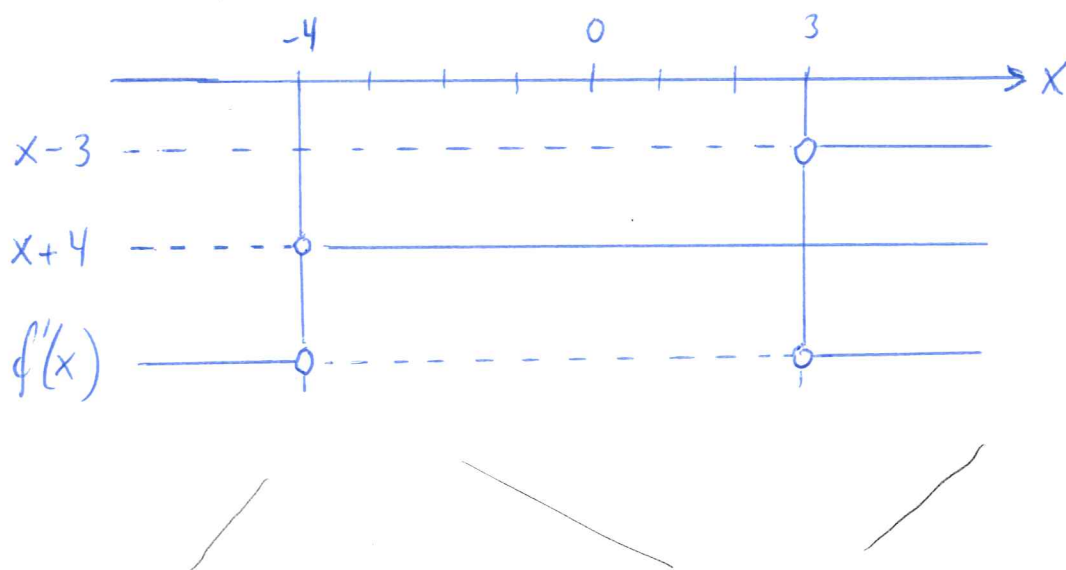
$$\Downarrow$$

$$x = \frac{-1+7}{2} = \frac{6}{2} = \underline{3} \quad \vee \quad x = \frac{-1-7}{2} = \frac{-8}{2} = \underline{-4}$$

Vi kan derfor skrive den deriverte som

$$f'(x) = (x-3) \cdot (x+4)$$

Vi kan bruke et fortegnsskjema for å analysere fortegnet til den deriverte:



Vi ser at $x = -4$ er et toppunkt og $x = 3$ er et bunnpunkt.

Vi regner ut funksjonsverdiene i disse punktene:

$$f(-4) = \frac{1}{3} \cdot (-4)^3 + \frac{1}{2} (-4)^2 - 12 \cdot (-4)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (-64) + \frac{1}{2} \cdot 16 + 48$$

$$= -\frac{64}{3} + 56 = -\frac{64}{3} + \frac{168}{3} = \underline{\underline{\frac{104}{3}}}$$

$$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 + \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 12 \cdot 3$$

$$= 9 + \frac{9}{2} - 36 = \frac{9}{2} - 27$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{54}{2} = \underline{\underline{-\frac{45}{2}}}$$

$f(x)$ har toppunkt $(-4, \frac{104}{3})$ og bunnpunkt $(3, -\frac{45}{2})$

Oppgave 6

$$a) f(x) = \frac{x^3 + 3}{3x} + e^x$$

Her må vi bruke regelen for derivasjon av en brøk:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Vi får da

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot 3x - (x^3 + 3) \cdot 3}{(3x)^2} + e^x$$

$$= \frac{9x^3 - 3x^3 - 9}{9x^2} + e^x$$

$$= \frac{6x^3 - 9}{9x^2} + e^x = \frac{\cancel{3}(2x^3 - 3)}{\cancel{3} \cdot 3x^2} + e^x$$

$$= \underline{\underline{\frac{2x^3 - 3}{3x^2} + e^x}}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{1}{x^3} dx &= \int x^{-3} dx = \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C \\ &= \underline{\underline{-\frac{1}{2} x^{-2} + C}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int_2^4 (2x^3 + x^2) dx &= \left[\frac{2}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 \right]_2^4 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4^4 + \frac{1}{3} \cdot 4^3 - \left(\frac{1}{2} \cdot 2^4 + \frac{1}{3} \cdot 2^3 \right) \\ &= 128 + \frac{64}{3} - 8 - \frac{8}{3} \\ &= 120 + \frac{56}{3} = \frac{360}{3} + \frac{56}{3} \\ &= \underline{\underline{\frac{416}{3} \approx 138.67}} \end{aligned}$$

Oppgave 7

- a) Å plukke ut tall til en lottorekke er uordnet utvalg uten tilbakelegging. Det er uordnet fordi rekkefølgen tallene trekkes i er uten betydning. Det er uten tilbakelegging fordi et tall som plukkes ut ikke kan plukkes ut på nytt. Antallet er gitt ved

$$\binom{48}{6} = \frac{48!}{6! (48-6)!} = \frac{48!}{6! 42!}$$

$$= \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42!}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 42!}$$

$$= \underline{\underline{12\,271\,512}}$$

$$b) P(\text{seks rette}) = \frac{\text{gunstige}}{\text{mulige}} = \frac{1}{12\,271\,512} = \underline{\underline{8,1 \cdot 10^{-8}}}$$

Oppgave 8

Vi definerer følgende hendelser:

J : den uttrukne personen er en jente.

S : den uttrukne personen sovner

Opplysningene som er gitt i oppgaven kan vi skrive slik:

$$P(J) = 0.5 \quad (\text{fordi det er like mange jenter som gutter}).$$

$$P(\bar{J}) = 1 - P(J) = 1 - 0.5 = 0.5$$

$$P(S|J) = 0.2 \quad (\text{sannsynligheten for at personen sovner gitt at det er en jente er } 20\%).$$

$$P(S|\bar{J}) = 0.5 \quad (\bar{J} \text{ betyr ikke jente, og er altså det samme som gutt}).$$

- a) Sannsynligheten for at en person sovner, finner vi ved hjelp av total sannsynlighet:

$$P(s) = P(J) \cdot P(s|J) + P(\bar{J}) \cdot P(s|\bar{J})$$

$$= 0.5 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.5$$

$$= 0.1 + 0.25 = \underline{\underline{0.35}}$$

- b) Sannsynligheten for at den uttrukne er en jente gitt at vedkommende sovner kan vi skrive $P(J|s)$. Denne kan vi finne ved hjelp av Bayes' setning:

$$P(J|s) = \frac{P(J) \cdot P(s|J)}{P(s)}$$

$$= \frac{0.5 \cdot 0.2}{0.35} = \underline{\underline{0.29}}$$