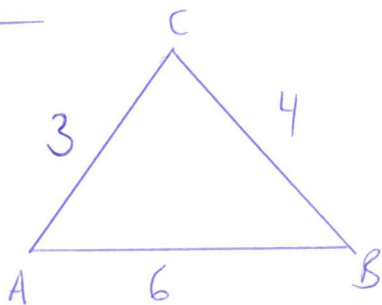


FØRKURS I MATEMATIKK

10. JUNI 2014

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1



a) Vinkel C finner vi lettest ved hjelp av cosinussetningen:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4^2 + 3^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 3} = -0.4583$$



$$C = \cos^{-1}(-0.4583) = \underline{\underline{117.3^\circ}}$$

b) Arealet av trekanten er gitt ved

$$T = \frac{1}{2} ab \sin C$$

Setter vi inn tall får vi

$$T = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \sin 117,3^\circ = \underline{\underline{5,3}}$$

Oppgave 2

a) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 14$

$$\underline{\underline{f'(x) = 3x^2 + 2x - 1}}$$

b) $f(x) = \frac{2x^2 + 12}{2x}$

Her må vi bruke regelen for derivasjon av et brøkkutttrykk:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

(3)

Dette gir

$$f'(x) = \frac{4x \cdot 2x - (2x^2 + 12) \cdot 2}{(2x)^2}$$

$$= \frac{8x^2 - 4x^2 - 24}{4x^2} = \frac{4x^2 - 24}{4x^2}$$

$$= \frac{\cancel{4}(x^2 - 6)}{\cancel{4} \cdot x^2} = \underline{\underline{\frac{x^2 - 6}{x^2}}}$$

c) $f(x) = e^{x^2+4}$

Her må vi bruke kjerneregelen med x^2+4 som kjerne.

$$f'(x) = e^{x^2+4} \cdot (x^2+4)'$$

$$= \underline{\underline{2x \cdot e^{x^2+4}}}$$

d) I oppgave a fant vi at den deriverte av denne funksjonen er

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

Den annenderiverte er den deriverte av denne:

$$f''(x) = 3 \cdot 2x + 2 = \underline{\underline{6x + 2}}$$

Oppgave 3

$$a) \int (x^3 - 2x + 4) dx$$

$$= \frac{1}{3+1} x^{3+1} - 2 \cdot \frac{1}{1+1} x^{1+1} + 4x + C$$

$$= \frac{1}{4} x^4 - x^2 + 4x + C$$

$$b) \int_0^2 (e^x + 4x) dx$$

$$= [e^x + 2x^2]_0^2$$

$$= e^2 + 2 \cdot 2^2 - (e^0 + 2 \cdot 0^2)$$

$$= e^2 + 8 - 1 - 0$$

$$= \underline{\underline{e^2 + 7}}$$

Oppgave 4

6

$$a) \quad x - 2 = \sqrt{8 - x}$$

Vi kvadrerer begge sider for å fjerne
rottegnet :

$$(x - 2)^2 = \sqrt{8 - x}^2$$

$\Downarrow$

$$x^2 - 4x + 4 = 8 - x$$

$\Downarrow$

$$x^2 - 4x + 4 - 8 + x = 0$$

$\Downarrow$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$\Downarrow$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$$

$\Downarrow$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = \underline{4} \quad \vee \quad x = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = \underline{-1}$$

Vi må sjekke om vi har fått falske løsninger:

$x = 4$:

V.S: $4 - 2 = \underline{2}$

H.S: $\sqrt{8-4} = \sqrt{4} = \underline{2}$

Vi ser at dette er en løsning av ligningen.

$x = -1$:

V.S: $-1 - 2 = -3$

H.S: $\sqrt{8-(-1)} = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$

Her ser vi at venstre side ikke blir lik høyre side.

$x = -1$ er derfor ikke en løsning av ligningen.

Ligningen har derfor følgende løsning

$x = 4$

$$b) \quad 3\cos^2 x - \frac{3}{4}\cos x = 2\cos^2 x - \frac{1}{8}$$

Vi ordner først ligningen ved at flytte alt over på venstre side og trække sammen:

$$3\cos^2 x - \frac{3}{4}\cos x - 2\cos^2 x + \frac{1}{8} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\cos^2 x - \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{8} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\cos x = \frac{-(-\frac{3}{4}) \pm \sqrt{(-\frac{3}{4})^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8}}}{2 \cdot 1}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos x = \frac{\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{4}{8}}}{2} = \frac{\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{8}{16}}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos x = \frac{\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}}}{2} = \frac{\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}}{2}$$

$$\cos x = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}{2} = \frac{\frac{4}{4}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\vee \cos x = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}}{2} = \frac{\frac{2}{4}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

Dette gir

$$x = \cos^{-1} \frac{1}{2} = \underline{60^\circ} \vee x = 360^\circ - 60^\circ = \underline{300^\circ}$$

$$\vee x = \cos^{-1} \frac{1}{4} = \underline{75.5} \vee x = 360^\circ - 75.5^\circ = \underline{284.5^\circ}$$

Løsningen på ligningen er følgende

$$\underline{\underline{x = 60^\circ \vee x = 75.5^\circ \vee x = 284.5^\circ \vee x = 300^\circ}}$$

Oppgave 5

10

Vi kan kalle verdien av bilen etter t år for $V(t)$.

Hvis verdien faller med 20% hvert år, betyr det at verdien i år er 0,8 ganger verdien i fjor. Følgelig er verdien etter t år gitt ved

$$V(t) = 800\,000 \cdot 0.8^t$$

Vi må så finne den t som gjør at verdien er halvparten av 800 000, altså 400 000:

$$800\,000 \cdot 0.8^t = 400\,000$$

Deler vi med 800 000 på begge sider får vi

$$0.8^t = \frac{1}{2}$$

Så tar vi logaritmen på begge sider:

$$\ln 0.8^t = \ln \frac{1}{2}$$

Så kan vi bruke regelen $\ln a^b = b \cdot \ln a$:

$$t \cdot \ln 0.8 = \ln \frac{1}{2} \quad | : \ln 0.8$$

$$t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln 0.8} = \underline{3.1}$$

Da tar så vidt over tre år før bilens verdi
er halvert.

Oppgave 6

$$A(2, -3), B(-4, 0), C(3, 2)$$

$$a) \vec{AB} = [-4 - 2, 0 - (-3)] = \underline{\underline{[-6, 3]}}$$

$$\vec{AC} = [3 - 2, 2 - (-3)] = \underline{\underline{[1, 5]}}$$

$$b) |\vec{AB}| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 9} = \underline{\underline{\sqrt{45}}}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 25} = \underline{\underline{\sqrt{26}}}$$

$$c) \vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-6) \cdot 1 + 3 \cdot 5 = -6 + 15 = \underline{\underline{9}}$$

d) Vi kan bruke skalarproduktet til dette:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos \varphi$$

hvor φ betegner vinkelen mellom $\vec{AB}$ og $\vec{AC}$.

Løser vi denne med hensyn på $\cos \varphi$, får vi

$$\cos \varphi = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}$$

setter vi inn de tallene vi fant i spørsmål b og c, får vi

$$\cos \varphi = \frac{9}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{26}} = 0,2631$$

$\Leftrightarrow$

$$\varphi = \cos^{-1} 0,2631 = \underline{\underline{74,7^\circ}}$$

e) For å finne en parameterframstilling trenger vi en retningsvektor for linja og et punkt på linja.

En retningsvektor kan vi se av stigningstallet til linja som er tallet foran x, altså 3.

En retningsvektor er altså $\vec{r}_l = [1, 3]$.

Et punkt kan vi finne ved å sette inn en x -verdi og regne ut den tilhørende y -verdi.

$$x = 0 \text{ gir } y = 3 \cdot 0 - 4 = -4$$

Et kjent punkt er altså $(0, -4)$.

En parameterframstilling for linje er derfor

$$\underline{\underline{x = t \quad \wedge \quad y = 3t - 4}}$$

Oppgave 7

15

Vi skal velge ut fire av en gruppe på 500.

Vi har et uordnet utvalg siden rekkefølgen de trekkes i er uten betydning.

Siden en student ikke kan trekkes mer enn en gang, er dette et utvalg uten tilbakelegging. Antall muligheter er derfor

$$\binom{500}{4} = \frac{500!}{496! 4!} = \underline{\underline{2\,573\,031\,125}}$$

Oppgave 8

16

Opplysninger som er gitt i oppgaveteksten:

$$P(s) = 0,35$$

$$P(v | s) = 0,75$$

$$P(v | \bar{s}) = 0,25$$

a) Det vi skal finne er

$$P(s \cap v)$$

Her kan vi bruke den såkalte produktsetningen
som sier

$$P(s \cap v) = P(s) \cdot P(v | s)$$

$$= 0,35 \cdot 0,75 = \underline{\underline{0,2625}}$$

b) Det vi skal finne er $P(V)$.

For å finne dette må vi bruke setningen om total sannsynlighet som gir

$$P(V) = P(S) \cdot P(V|S) + P(\bar{S}) \cdot P(V|\bar{S})$$

Her må vi huske at

$$P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0,35 = 0,65$$

Vi får

$$P(V) = 0,35 \cdot 0,75 + 0,65 \cdot 0,25$$

$$= 0,2625 + 0,1625$$

$$= \underline{\underline{0,425}}$$