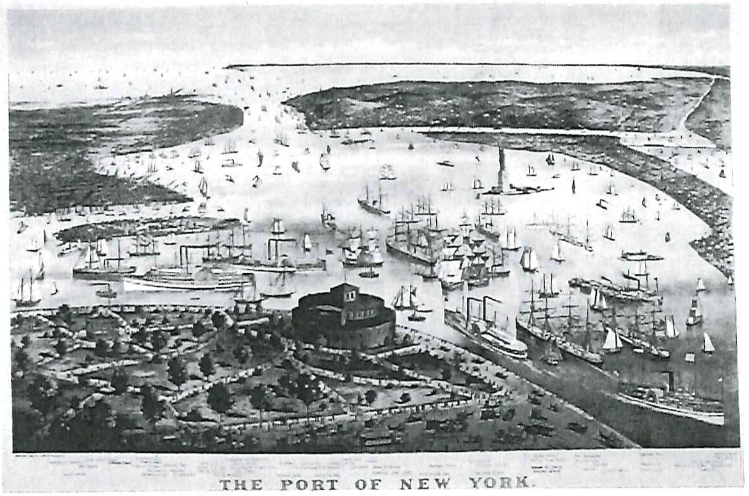
6 VEKTORER

HOVEDMOMENT
3c–f



Amerikas østkyst. Året er 1894.
Georg Harboe og Gabriel Samuelsen utvandret fra Norge noen år tidligere. I bagasjen hadde de drømmer om rikdom og frihet, men hverdagen ble fylt med slit som muslingfiskere.

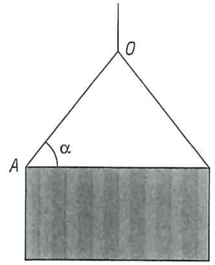
De lengtet bort fra slitet. De lengtet etter ære og rikdom, og de lengtet hjem. Ville det være mulig å oppnå alt dette ved å bli de første til å ro over Atlanteren?
De brukte to år på å bygge en 5,5 m lang åpen robåt. **6. juni 1896** la de ut med tidevannet fra New York havn. I båten hadde de mat for turen, klær og utstyr som hjalp dem å navigere.
14. juni – storm og de blåste tilbake 40 km.
7. juli – ny storm, båten kantret. De fikk båten på kjøl, men mye av maten var ødelagt.
7. august, etter 5230 km og et blodig slit, ble de to tatt imot av tusenvis av mennesker i Le Havre havn i Frankrike.

Nå var tiden kommet for å høste rikdom og berømmelse, tenkte de to, men interessen i Frankrike og England var liten. Ok, men i Norge var man vel interessert? Her led de sitt siste «skipbrudd». De kom i kjølvannet av Fram og Nansen. I avisene ble de utskjelt for å ha seilt med amerikansk flagg. 10 riksdaler fra Oskar II var alt de stod igjen med.

Harboe dro tilbake til Amerika og døde fattig etter et strevsomt liv som seilmaker. Samuelsen ble bonde på Sørlandet. Han døde på gamlehjemmet i Farsund i 1946.

På et forblåst og stormende hav er det kanskje nok med en sjøsikker båt, en klokke, en sekstant og litt kunnskap om stjernehimmelen og *vektorer* for å komme dit man vil.
I livet derimot...

6.1 NÅR 25 N + 25 N = 25 N



Figur 6.1

Når en båt skal lastes eller losses, blir kasser, esker osv. ofte lagt på en palle, som blir løftet opp av en heisekran.
Et slikt løft kan bli ganske tungt. Det er ikke noe problem for heisekrana. Men de som står for lastingen, vet at den «frie» delen av en stropp (f.eks. AO på figuren) ikke må være for kort, for da kan stroppen ryke. Grunnen er at jo kortere disse stroppene er, desto mindre blir vinkelen α på figuren. Og jo mindre denne vinkelen er, desto større blir strekket i stroppen.

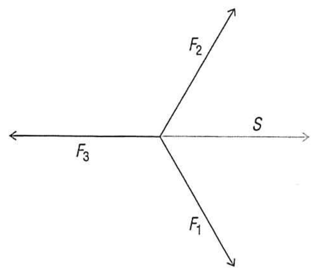
Så kan du spørre:
Hvorfor øker risikoen for at stroppen skal ryke når vinkelen α blir mindre?
Kan vi i det hele tatt regne oss fram til strekket i stroppen ut fra vinkelen α og tyngden av lasten?
Det er blant annet slike problemer vi kan løse med vektorregning.

Men før vi definerer hva vektorer er, og hvordan vi kan regne med dem, vil vi ta et enklere eksempel med krefter.
(Problemet med pallen kommer vi tilbake til i avsnitt 6.5.)

Eksempel 1

Tre snorer er festet til en liten ring som ligger på et bord. Tre elever trekker i hver sin snor med samme kraft. Vinkelen mellom to og to av snorene er 120°. Da er også vinkelen mellom kreftene 120°.
Vil ringen bevege seg, eller blir den liggende i ro?

Vi setter at kraften hver elev trekker med, er 25 N (25 newton).
Langs snorene tegner vi piler som viser *retningen* og *størrelsen* på kreftene. Vi kan for eksempel la 1 cm svare til en kraft på 10 N.
Vi kaller de tre kreftene F_1, F_2 og F_3.



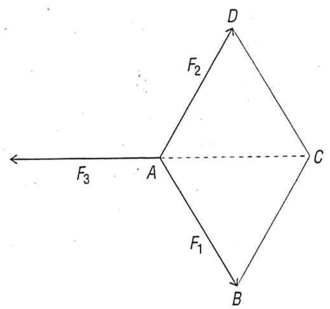
Figur 6.2

På grunn av at alle vinklene mellom snorene er 120°, og fordi de tre elevene trekker med samme kraft, er det ingen grunn til at én av dem «vinner» over de andre – hvem skulle det i så fall være?
Ringen blir derfor liggende i ro.

Vi tenker oss nå at vi erstatter de to kreftene F_1 og F_2 med én kraft S på 25 N i en retning som er stikk motsatt retningen til F_3.
Ringen vil fortsatt være i ro.
Kraften S har vi tegnet som en grønn pil. Denne pila er like lang som pila for F_3.
Da S erstatter F_1 og F_2, sier vi at S er *summen* av kreftene F_1 og F_2.

NB! Her kan det virke som om 25 N + 25 N blir 25 N. *Det* kan jo ikke være riktig.
Eksemplet viser at når vi skal summere krefter, er det ikke nok å se på hvor *store* kreftene er. Vi må også ta hensyn til hvilken *retning* de har.
Når summen av to krefter, hver på 25 N, blir en kraft på 25 N, er det fordi F_1 og F_2 har ulik retning.
Addisjon av krefter er altså en form for geometri.

Vi vil se litt nærmere på den *geometriske* sammenhengen mellom F_1, F_2 og S i eksempel 1.
Vi tegner de tre kreftene F_1, F_2 og F_3 på nytt, og utvider figuren ved å tegne et parallellogram $ABCD$ med F_1 og F_2 som to av sidene.

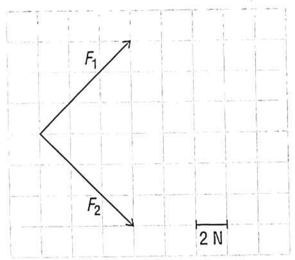


Figur 6.3

Alle vinklene i trekantene ABC og ACD er 60°. Trekantene er altså likesidede. Diagonalen AC har derfor samme lengde som F_1 og F_2. Men da er AC like lang som S på figur 6.2.
AC har også samme retning som S.
Diagonalen AC på figur 6.3 svarer altså helt til S på figur 6.2, der S er summen av kreftene F_1 og F_2.
Dette viser at summen av de to kreftene F_1 og F_2 er lik en kraft som faller sammen med *diagonalen* i parallellogrammet, både når det gjelder retning og størrelse (antall newton).
Det skal vi ha i tankene når vi definerer vektoraddisjon i avsnittet 6.3.

OPPGAVER

6.1
Finn størrelse og retning på summen av kreftene F_1 og F_2 på figuren.

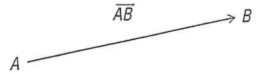


6.2
Tegn to krefter F_1 og F_2 ut fra samme punkt når $F_1 = 40$ N, $F_2 = 40$ N og vinkelen mellom dem er 60°. Bruk dette til å finne summen av kreftene.

6.2 VEKTORER

Pilene på figur 6.2 på side 207 er eksempler på det vi kaller vektorer.
En vektor er rett og slett et *rett linjestykke med retning*.

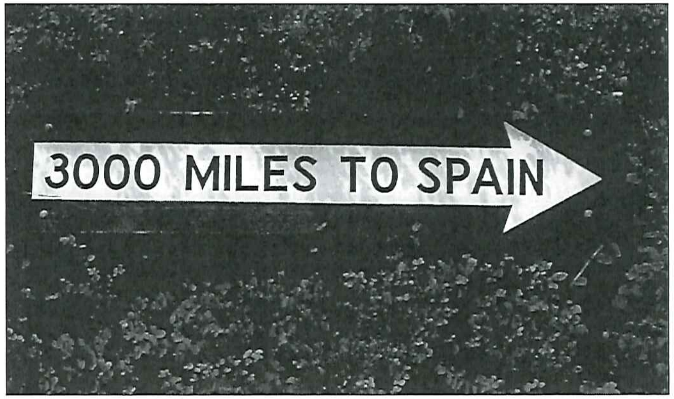
En vektor har to grunnleggende egenskaper: lengde og retning.



Figur 6.4

Vektoren *fra* et punkt A *til* et punkt B skriver vi $\overrightarrow{AB}$, som vi leser «AB-vektor».

Ofte bruker vi små bokstaver med pil over som navn på vektorer.
6.3 Vi kan for eksempel kalle $\overrightarrow{AB}$ for $\vec{v}$. Da får vi $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.



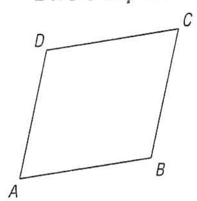
Like vektorer

Når retning og lengde for en vektor er gitt, er vektoren bestemt.
For at to vektorer skal være like, må de derfor ha samme retning og samme lengde.
Når to vektorer har samme retning, sier vi at de er *ensrettet*.

Definisjon på like vektorer
Når to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ensrettet og like lange, er de like.

Definisjonen innebærer at vi kan tegne en gitt vektor hvor vi vil.
To vektorer kan derfor være like selv om de ikke er tegnet på samme sted.
Dette er viktig når vi skal addere vektorer.

Eksempel 1



Figur 6.5

Firkanten $ABCD$ på figuren er en rombe.

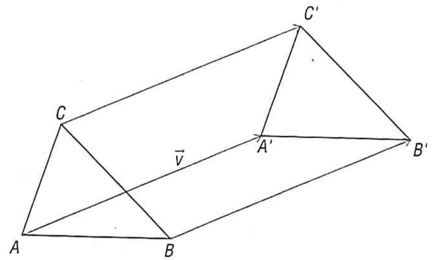
Sidene i en rombe er like lange, og de er parvis parallelle.
Vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{DC}$ er derfor ensrettet og like lange, og vi kan skrive $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Vi kan også skrive $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Men vi kan *ikke* sette likhetstegn mellom $\overrightarrow{AD}$ og $\overrightarrow{CB}$. Hvorfor?

Eksempel 2

På figuren er trekanten ABC parallellforskjøvet eller parallellflyttet til $A'B'C'$.
Vektorene $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ og $\overrightarrow{CC'}$ er ensrettet og like lange, altså er de like.

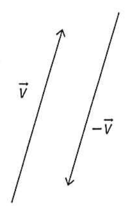


Figur 6.6

Setter vi $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$, så er også $\overrightarrow{BB'}$ og $\overrightarrow{CC'}$ lik $\vec{v}$.
Vi kan si at parallellflyttingen er gitt ved vektoren $\vec{v}$.

Motsatte vektorer

Når to vektorer er like lange og motsatt rettet, sier vi at de er *motsatte vektorer*.
Den motsatte vektoren til $\overrightarrow{AB}$ er $\overrightarrow{BA}$, det vil si vektoren fra B til A.



Figur 6.7

I stedet for $\overrightarrow{BA}$ kan vi skrive $-\overrightarrow{AB}$. Vi vedtar at

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

Den motsatte vektoren til $\vec{v}$ er $-\vec{v}$.

Minustegnet foran $\overrightarrow{AB}$ betyr ikke at $-\overrightarrow{AB}$ er en negativ vektor.
Det betyr bare at $-\overrightarrow{AB}$ er den motsatte vektoren til $\overrightarrow{AB}$.
6.4 Vi bruker ikke ordene *positiv* og *negativ* om vektorer!

Lengden av en vektor

Lengden av en vektor blir også kalt *absoluttverdien* av vektoren.
Lengden eller absoluttverdien av $\overrightarrow{AB}$ skriver vi $|\overrightarrow{AB}|$.
Hvis lengden av $\overrightarrow{AB}$ er 4 lengdeenheter, skriver vi $|\overrightarrow{AB}| = 4$.

To motsatte vektorer har samme lengde. Derfor har vi at $|-\vec{v}| = |\vec{v}|$.

Lengden $|\vec{v}|$ er *ikke* en vektor. Den er et tall. Vi sier også at $|\vec{v}|$ er en *skalar* størrelse.
Ordet skalar blir brukt for å understreke at en størrelse ikke er en vektor. Også i fysikken er det vanlig å si at størrelser som ikke har retning, for eksempel volum eller tid, er skalare størrelser.

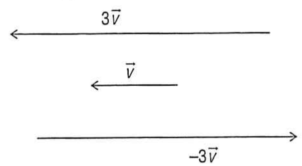
Tall multiplisert med en vektor

Vi skal nå definere hva vi får når vi *multipliserer* et tall med en vektor.

Vi lar $\vec{v}$ være en vektor.

- $3\vec{v}$ betyr en *vektor* som er *ensrettet* med $\vec{v}$ og tre ganger så lang som $\vec{v}$. Vi har derfor $|3\vec{v}| = 3 \cdot |\vec{v}|$
- Vektoren $(-3)\vec{v}$ er også tre ganger så lang som $\vec{v}$, men *motsatt rettet*. Vi har $|(-3)\vec{v}| = 3 \cdot |\vec{v}|$

Vanligvis skriver vi $-3\vec{v}$ i stedet for $(-3)\vec{v}$.

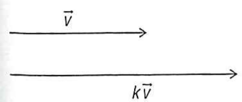


Figur 6.8

Både $-3\vec{v}$ og $3\vec{v}$ er parallelle med $\vec{v}$.

Som tegn for *er parallell med* bruker vi to parallelle loddrett streker.
Vi kan altså skrive

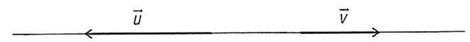
$$3\vec{v} \parallel \vec{v} \quad \text{og} \quad -3\vec{v} \parallel \vec{v}$$



Figur 6.9

Parallelle vektorer
$k\vec{v} \parallel \vec{v}$ for alle verdier av tallet k

6.5, 6.6 To vektorer er parallelle også når de er tegnet på samme linje.

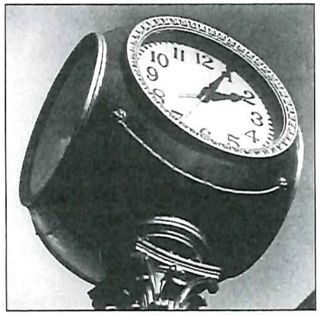


Figur 6.10

$\vec{u} \parallel \vec{v}$

Vinkler mellom vektorer

Vi *definerer* vinkelen mellom vektorer slik at den får en verdi i intervallet [0° , 180°].



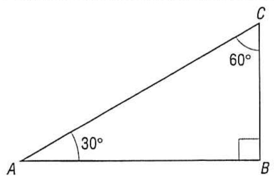
Med vinkelen mellom to vektorer mener vi den minste positive vinkelen vi må dreie én av vektorene slik at den blir ensrettet med den andre.

Dersom to vektorer er ensrettede på forhånd, trenger vi ikke å dreie noe. Da er vinkelen mellom vektorene 0°. Vinkelen mellom to motsatte vektorer er 180°.

Vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kan vi skrive $(\vec{a}, \vec{b})$ eller $(\vec{b}, \vec{a})$.

Det følger av definisjonen at $(\vec{a}, \vec{b})$ og $(\vec{b}, \vec{a})$ er samme vinkel.

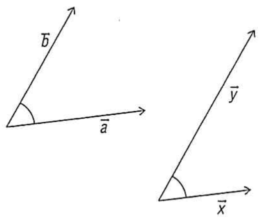
Eksempel 3



Figur 6.11

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 30°$$
$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 90°$$
$$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = 60°$$

Eksempel 4



Figur 6.12

På figuren er $\vec{x}$ ensrettet med $\vec{a}$, og $\vec{y}$ med $\vec{b}$. Derfor er

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{a}, \vec{b})$$

OPPGAVER

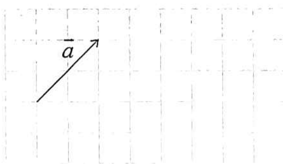
6.3
Tegn tre punkter A, B og C som ikke ligger på en linje. Skriv opp de seks vektorene som blir bestemt av de tre punktene.

6.4
Ta for deg figuren i eksempel 1. Finn de motsatte vektorene til

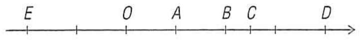
a $\overrightarrow{AB}$ b $\overrightarrow{AD}$ c $\overrightarrow{CB}$

6.5
På figuren har vi tegnet en vektor $\vec{a}$. Tegn en vektor som er

1 den motsatte vektoren til $\vec{a}$
2 ensrettet med $\vec{a}$ og dobbelt så lang som $\vec{a}$
3 motsatt rettet av $\vec{a}$ og halvparten så lang som $\vec{a}$
4 vinkelrett på $\vec{a}$ og er like lang som $\vec{a}$



6.6



Vi setter $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$.

a Forklar at $\overrightarrow{OB} = 2\vec{v}$.

b Finn $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$ og $\overrightarrow{CE}$ uttrykt ved $\vec{v}$.

6.7

a Vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 70°.
Hva er vinkelen mellom $3\vec{a}$ og $2\vec{b}$?

b Hva er den største verdien vinkelen mellom to vektorer kan ha? Hva er den minste verdien vinkelen kan ha?

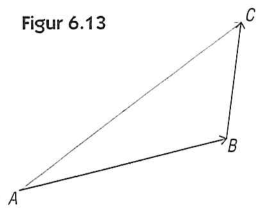
6.3 VI ADDERER VEKTORER

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Vi skal nå definere regneoperasjonen *addisjon* for vektorer. Vi tar utgangspunkt i et praktisk eksempel.

Eksempel 1

Figur 6.13



Vi tenker oss at en båt først flytter seg fra A til B på figuren, deretter fra B til C.
Den første forflytningen er gitt ved vektoren $\overrightarrow{AB}$, den andre ved $\overrightarrow{BC}$.
Den *samlede* forflytningen for båten er en forflytning fra A til C.

Det kan være rimelig å si at samlet forflytning er *summen* av de to enkeltforflytningene. Det skriver vi slik: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

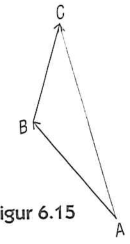
Den formelen vi kom fram til i eksempel 1, kan vi bruke som definisjon på vektoraddisjon.
Men først vil vi vise hvordan formelen kan brukes på vektorer som *ikke* er tegnet etter hverandre.

Eksempel 2

I figur a nedenfor har vi tegnet to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
I figur b tegner vi summen av disse vektorene. Vi benytter oss da av at vi kan flytte en vektor hvor vi vil, bare den beholder riktig retning og lengde.
Vi velger et punkt A og tegner $\overrightarrow{AB}$ lik $\vec{u}$. Deretter tegner vi $\overrightarrow{BC}$ lik $\vec{v}$.
Da får vi

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Figur 6.14 a, b



Figur 6.15

6.8–6.11

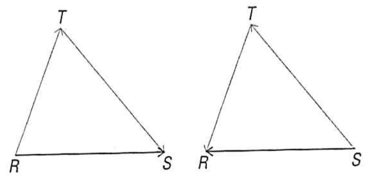
Eksempel 2 viser at når vi skal addere to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ etter formelen i eksempel 1, kan vi alltid velge tre punkter A, B og C slik at $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, og $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Vi kan derfor bruke formelen som en generell definisjon.

Definisjon på vektoraddisjon

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}. \qquad (1)$$

Eksempel 3

Vi lar R, S og T være tre punkter som ikke ligger på en rett linje. De tre punktene danner en trekant som gir oss seks eksempler på vektorsummer.



Figur 6.16 a, b

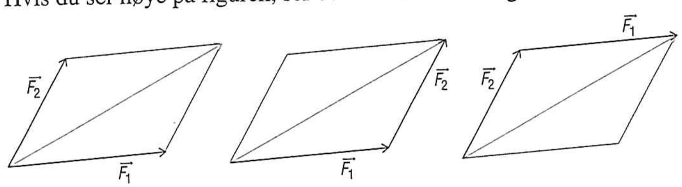
Her er to eksempler:

$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{TS}$$

$$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TR}$$

Eksempel 4

På figuren viser vi tre måter å finne vektorsummen $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ på. Hvis du ser nøye på figuren, ser du at de tre måtene gir samme svar.



Figur 6.17

Figuren gir oss en setning om addisjon av vektorer.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_1$$

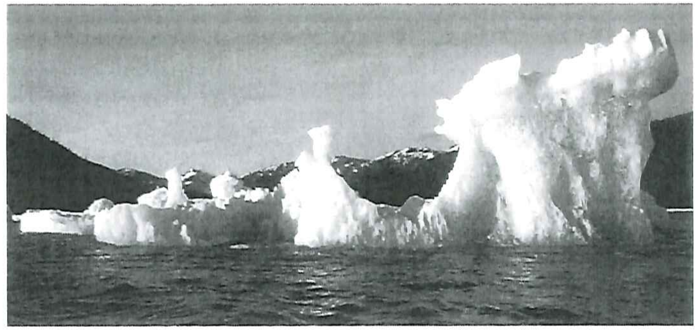
6.8–6.12

Også ved vektoraddisjon kan vi bytte om leddene!

Eksempel 5

I eksempel 1 ble én forflytning etterfulgt av en annen. Men to forflytninger kan også skje samtidig. Som eksempel kan vi se på bevegelsen til et isfjell.

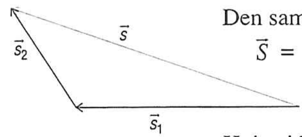
Hvis det ikke var for vinden, ville isfjellet følge havstrømmen og ha samme fart som vannet. Isfjellet ville da være i ro i forhold til vannet. Men når vinden *ikke* har samme retning og styrke som havstrømmen, vil den gi isfjellet en annen retning eller en annen fart enn den strømmen har. Da vil isfjellet bevege seg i forhold til vannet.



- Forflytningen isfjellet ville ha fått på grunn av vinden dersom vannet hadde vært i ro, kaller vi $\vec{S}_1$.
- Forflytningen vannet har i det samme tidsrommet, kaller vi $\vec{S}_2$.

Den samlede forflytningen for isfjellet er da vektoren

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$



Figur 6.18

Hvis vi kjenner $|\vec{S}_1|$, $|\vec{S}_2|$ og vinkelen mellom dem, kan vi bruke cosinussetningen til å regne ut $|\vec{S}|$.

Kjenner vi den tiden forflytningen i eksempel 5 tar, kan vi finne farten.

- Vi lar $\vec{v}_1$ være farten til isfjellet *i forhold til vannet*, det vil si den farten isfjellet hadde hatt hvis vannet hadde vært i ro.
- Farten til vannet *i forhold til havbunnen* kaller vi $\vec{v}_2$.

Farten til isfjellet (i forhold til bunnen) er da

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

Retningen på $\vec{v}$ blir den samme som retningen på $\vec{S}$ i eksemplet.

Nullvektoren

$\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{BA}$ er motsatte vektorer. Når vi adderer dem, får vi vektoren «fra A til A»:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$$

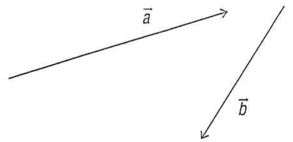
Her kan det virke naturlig å skrive null som svar. Men vi ønsker at summen av to vektorer alltid skal være en vektor. Derfor sier vi at $\overrightarrow{AA}$ er en vektor, men vektoren er uten lengde og retning*. Vi kaller den *nullvektoren* og skriver $\vec{0}$.

Nullvektoren er også lik $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{CC}$ osv.

*Se kommentar side 223

OPPGAVER

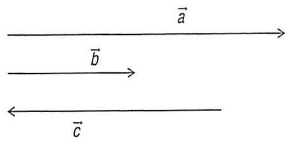
6.8



Tegn vektorsummen

a $\vec{a}+\vec{b}$ b $3\vec{a}+2\vec{b}$ c $2\vec{a}+3\vec{b}$

6.9



Tegn

a $\vec{a}+\vec{b}$ b $\vec{a}+\vec{c}$ c $\vec{b}+\vec{c}$

6.10
Tegn to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

a Tegn vektorsummen $\vec{u}+\vec{v}$ ut fra et punkt A.
Tegn også vektorsummen $3\vec{u}+3\vec{v}$ ut fra A.
Bruk figuren til å vise at $3(\vec{u}+\vec{v})=3\vec{u}+3\vec{v}$.

b Skriv $m(\vec{u}+\vec{v})$ som en sum av to vektorer.

6.11
Se på figur 6.14. Finn summen av vektorene

a $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ og $\overrightarrow{CA}$ b $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ og $\overrightarrow{AC}$

6.12
Ta for deg eksempel 3. Tegn figur og skriv opp de fire andre vektorsummene.

6.13
Regn ut $|\vec{S}|$ på figur 6.18 dersom $|\vec{S}_1| =$ 1000 m, $|\vec{S}_2| = 1500$ m og $\left(\vec{S}_1, \vec{S}_2\right) = 45°$.

6.4 Å TREKKE FRA EN VEKTOR

$-\vec{v}$ er den motsatte vektoren til $\vec{v}$. Her er minustegnet brukt som et «motsatt-tegn».
Men hva skal *differensen* $\vec{u}-\vec{v}$ bety?

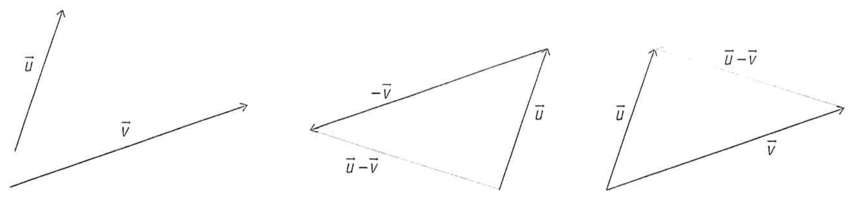
I ord kan vi si det slik:
Å trekke fra $\vec{v}$ er det samme som å legge til $-\vec{v}$.

Definisjon på vektordifferens
$\vec{u}-\vec{v} = \vec{u}+(-\vec{v})$

Eksempel 1

Vi skal tegne differensen mellom to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$. Det kan vi gjøre på to måter.

- På figur b på neste side bruker vi definisjonen direkte.
- På figur c bruker vi at $\vec{u}-\vec{v}$ er den vektoren vi må legge til $\vec{v}$ for å få $\vec{u}$. Vi tegner $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ut fra samme punkt. $\vec{u}-\vec{v}$ er da vektoren fra spissen av $\vec{v}$ til spissen av $\vec{u}$.

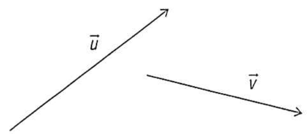


Figur 6.19 a, b, c

$\vec{v}+(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{v}+\vec{u}+(-\vec{v}) = \vec{u}$

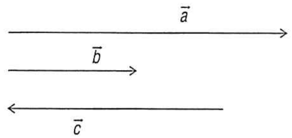
OPPGAVER

6.14



Tegn vektordifferensen $\vec{u}-\vec{v}$.

6.15



Tegn

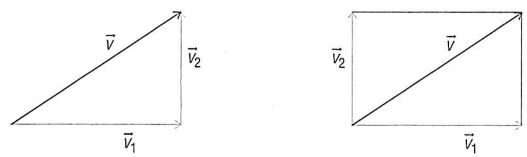
a $\vec{a}-\vec{b}$ b $\vec{a}-\vec{c}$ c $\vec{b}-\vec{c}$

6.16
Tegn en trekant ABC. Skriv opp vektoren

a $\overline{AC}-\overline{AB}$ b $\overline{AB}-\overline{AC}$

6.5 DEKOMPONERING AV VEKTORER

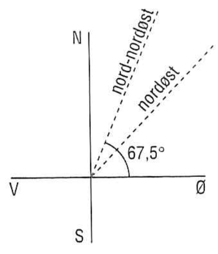
I eksempler og oppgaver har du sett hvordan vi kan addere vektorer. Noen ganger er det nødvendig å gå den motsatte veien.
Vi skriver da en gitt vektor $\vec{v}$ som en sum av to vektorer. De to vektorene kaller vi *komponentene* til $\vec{v}$. Som regel lar vi de to komponentene stå vinkelrett på hverandre.
Når vi skriver $\vec{v}$ som en sum av to vektorer, sier vi at vi *dekomponerer* $\vec{v}$.

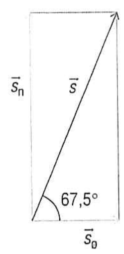


Figur 6.20a, b

$\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ er komponentene til $\vec{v}$.

Eksempel 1





Figur 6.21a, b

En båt kjører med farten 0,34 km per minutt i nord-nordøstlig retning. Retningen danner da en vinkel på 22,5° med retningen syd–nord.

På 20 minutter flytter båten seg 0,34 · 20 = 6,8 km.
Hvor langt østover, og hvor langt nordover kommer båten på denne tiden?

Vi dekomponerer forflytningen $\vec{s}$ i én komponent $\vec{s}_ø$ med retning mot øst, og én komponent $\vec{s}_n$ med retning mot nord.

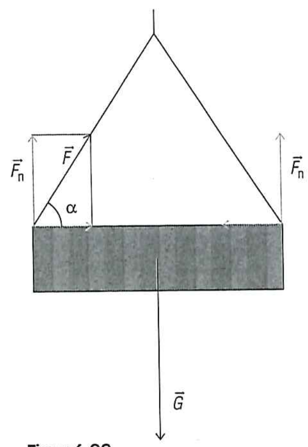
Av figuren ser vi at $\cos 67{,}5° = \dfrac{|\vec{s}_ø|}{|\vec{s}|}$ og at $\sin 67{,}5° = \dfrac{|\vec{s}_n|}{|\vec{s}|}$.
Det viser at

$$|\vec{s}_ø| = |\vec{s}| \cdot \cos 67{,}5° = 6{,}8 \cdot \cos 67{,}5° = 2{,}6$$

$$|\vec{s}_n| = |\vec{s}| \cdot \sin 67{,}5° = 6{,}8 \cdot \sin 67{,}5° = 6{,}3$$

Forflytningen i østlig retning er 2,6 km.
6.17 Forflytningen i nordlig retning er 6,3 km.

Eksempel 2



Figur 6.22

Vi skal nå ta for oss problemet vi startet kapitlet med.
Hvordan finner vi strekket i de to stroppene når pallen henger i dem?
Strekket i en stropp er det samme som kraften $\vec{F}$ på pallen fra stroppen.
Vektorsummen av kreftene som trekker pallen oppover, er like stor som tyngden av pallen, men motsatt rettet.

Vi dekomponerer kraften $\vec{F}$ fra en av stroppene i en loddrett og en vannrett komponent. Det er bare den loddrette komponenten $\vec{F}_n$ som bidrar til å løfte pallen.

Absoluttverdien av $\vec{F}_n$ må derfor være halvparten så stor som tyngden av pallen, det vil si halvparten så stor som $|\vec{G}|$.
Vi kan nå finne $|\vec{F}|$ uttrykt ved $|\vec{G}|$.

Av $\sin\alpha = \dfrac{|\vec{F}_n|}{|\vec{F}|}$ får vi $|\vec{F}| = \dfrac{|\vec{F}_n|}{\sin\alpha} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot|\vec{G}|}{\sin\alpha}$.

Hvis tyngden av pallen er 6000 N, og vinkelen α er 60°, blir strekket i hver av stroppene

$$|\vec{F}| = \frac{\frac{1}{2}\cdot 6000}{\sin 60°} = 3460 \text{ N}$$

OPPGAVER

6.17
Tegn en vektor med lengden 10 cm som danner 30° med nedre kant av papirarket.
Dekomponer vektoren slik at du får én komponent parallell med nedre kant og én parallell med sidekanten av papiret.
Hvor lange er de to komponentene?

6.18
Ta for deg eksempel 2. Tegn figur og bruk den til å finne draget i stroppen (med den samme tyngden) for α-verdiene 30°, 20° og 10°.
Hvordan går det med draget hvis α blir svært liten?

6.6 SKALARPRODUKT

$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$
$\alpha = (\vec{u}, \vec{v})$

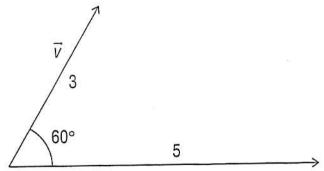
Du har hittil lært om tre regneoperasjoner for vektorer: tall multiplisert med vektor, vektoraddisjon og vektorsubtraksjon.
Du skal nå lære en regneoperasjon til. Den heter *skalarprodukt*, og virker i første omgang nokså kunstig. Den har ingen parallell i tallregningen.

Når vi skal regne ut skalarproduktet av to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$, er det to ting som teller:

- *lengden* av vektorene
- *vinkelen* mellom vektorene

Skalarproduktet av to vektorer er lik lengden av den ene vektoren ganger lengden av den andre ganger cosinus til vinkelen mellom dem.
Et skalarprodukt er altså ikke en vektor, men et reelt tall.

Vi skal regne ut skalarproduktet av to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ når $\vec{u}$ har lengden 5, $\vec{v}$ har lengden 3, og vinkelen mellom dem er 60°.



Figur 6.23

Skalarproduktet av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er

$$5 \cdot 3 \cdot \cos 60° = 5 \cdot 3 \cdot 0{,}5 = 7{,}5 \qquad (1)$$

Som tegn for skalarprodukt bruker vi et vanlig gangetegn, men med en annen betydning enn i tallregning!
Skalarproduktet av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ skriver vi $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
Den vanlige skrivemåten for (1) blir da

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 5 \cdot 3 \cdot \cos 60° = 7{,}5$$

Definisjonen på skalarprodukt

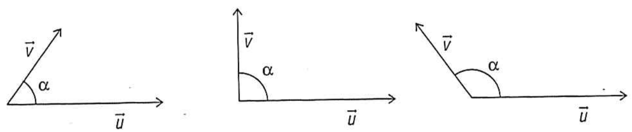
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \qquad (2)$$

6.19 NB! Merk deg at skalarproduktet er et tall.

Eksempel 1

Vi lar $\vec{u}$ og $\vec{v}$ fortsatt ha lengdene 5 og 3, men vi vil ikke binde oss til en bestemt vinkel mellom dem. Vi lar vinkelen være α.
Skalarproduktet av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \cdot 3 \cdot \cos\alpha \qquad \text{der } \alpha \in [0°, 180°]$$



Figur 6.24

$$\begin{aligned} &\text{Hvis } \alpha < 90°, \text{ er } \cos\alpha > 0, \text{ og } \vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \\ &\text{Hvis } \alpha = 90°, \text{ er } \cos\alpha = 0, \text{ og } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ &\text{Hvis } \alpha > 90°, \text{ er } \cos\alpha < 0, \text{ og } \vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Merk deg at skalarproduktet har samme fortegn som cos α.

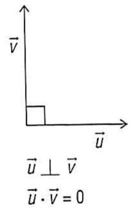
Hva er den største og hva er den minste verdien dette skalarproduktet kan ha, og hvor stor er α da?

Det du særlig skal merke deg i eksempel 1, er linje (3):
Når to vektorer står vinkelrett på hverandre, er skalarproduktet null.

Det omvendte gjelder også:
Når skalarproduktet er null, står vektorene vinkelrett på hverandre.

Som tegn for «vinkelrett på» bruker vi ⊥. De to setningene kan da skrives slik:

$$\vec{u} \perp \vec{v}$$
$$\Updownarrow$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$



Figur 6.25

I tallregning er a^2 en forkortet skrivemåte for $a \cdot a$.
I vektorregning er $\vec{a}^2$ en forkortet skrivemåte for $\vec{a} \cdot \vec{a}$.
$\vec{a}^2$ er altså et skalarprodukt.

Av definisjonen på skalarprodukt får vi

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0° = |\vec{a}|^2$$

fordi cos 0° = 1. Altså har vi

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \qquad (4)$$

$\vec{a}$ er en vektor, men $\vec{a}^2$ er et tall, for *alle* skalarprodukter er tall.
Tallet $\vec{a}^2$ er positivt (eller null). Det er også $|\vec{a}|^2$. Derfor kan vi ta kvadratroten på begge sider i (4).
Kvadratroten av $|\vec{a}|^2$ er $|\vec{a}|$. Altså får vi

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} \qquad (5)$$

Det kan virke upraktisk å bruke samme tegn for skalarprodukt som for multiplikasjon med tall. Men det har sine fordeler. Mange av de regnereglene du kjenner fra tallregningen, gjelder tilsvarende for skalarprodukt. Her er to eksempler:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}+\vec{d}\right) = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d} \qquad (6)$$

$$\vec{a}\cdot\left(k\vec{b}\right) = k\vec{a}\cdot\vec{b} \qquad (7)$$

Av den siste regelen får vi at

$$\vec{a}\cdot\left(-\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\left((-1)\cdot\vec{b}\right) = (-1)\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} = -\vec{a}\cdot\vec{b} \qquad (8)$$

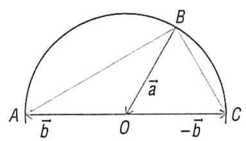
I eksemplet nedenfor bruker vi (4), (6) og (8).

Eksempel 2

Ved å bruke skalarproduktet kan vi bevise geometriske setninger som ikke har noe med vektorer å gjøre. Som eksempel vil vi vise denne setningen: Når toppunktet til en vinkel ligger på en sirkel og vinkelbeina spenner over halve sirkelen, er vinkelen rett.
På figuren setter vi $\overrightarrow{BO} = \vec{a}$ og $\overrightarrow{OA} = \vec{b}$. Da er $\overrightarrow{OC} = -\vec{b}$. Vi får

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

Da $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, er skalarproduktet $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ lik null.
Det viser at $\angle ABC = 90°$.



Figur 6.26

Skalarprodukt og arbeid

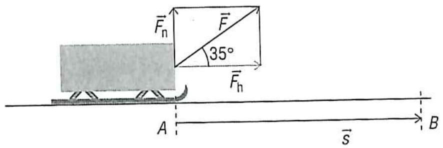
Du skal nå se hvordan skalarprodukt kan brukes til å regne ut det arbeidet en kraft utfører på en gjenstand.

Fra naturfaget i grunnkurset vet du at arbeid er *kraft ganger vei*. Men det forutsetter at kraft og vei (forflytningen) har samme retning.
Vi skal nå se på et eksempel der kraften $\vec{F}$ og forflytningen $\vec{s}$ danner en vinkel med hverandre.

Eksempel 3

Joulenissens skuter trekker en kjelke etter seg med en kraft $\vec{F}$ som danner 35° med snøflaten. $\vec{F}$ har absoluttverdien 200 N.

Vi skal regne ut det arbeidet kraften $\vec{F}$ utfører på kjelken (og Nina Nisse) på et horisontalt veistykke AB = 25 meter.
Vi setter $\overrightarrow{AB} = \vec{s}$.



Figur 6.27

Vi dekomponerer $\vec{F}$ i en horisontal komponent $\vec{F}_h$ (som er ensrettet med $\vec{s}$) og en vertikal komponent $\vec{F}_n$.
Den vertikale komponenten utfører ikke noe arbeid – den vil verken øke eller minke farten på kjelken. Det er derfor bare komponenten $\vec{F}_h$ som utfører et arbeid.

Her er altså «kraft ganger vei» det samme som $|\vec{F}_h| \cdot |\vec{s}|$.

Av figuren ser vi at $|\vec{F}_h| = |\vec{F}| \cdot \cos 35° = |\vec{F}| \cdot \cos(\vec{F}, \vec{s})$.

$|\vec{F}_h| \cdot |\vec{s}|$ kan derfor skrives $|\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\vec{F}, \vec{s})$, som igjen er det samme som skalarproduktet $\vec{F} \cdot \vec{s}$.

Det arbeidet som $\vec{F}_h$, og dermed $\vec{F}$, utfører på kjelken, er altså

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = 200 \cdot 25 \cdot \cos 35° = 4100 \text{ Nm} = 4100 \text{ J}$$

Veistykket AB i eksempel 3 er horisontalt. Hvis det ikke var noen friksjon – hvilket i praksis er umulig – ville hele arbeidet som $\vec{F}$ utfører på kjelken, gå med til å gi kjelken større fart. Vi kan ikke regne ut hvor mye farten ville øke. Men det vi kan si, er at bevegelsesenergien til kjelken (og Nina Nisse) ville øke med 4100 J fra A til B.
Hva skal vi si om Nina Nisses «innsats»? Det kommer vi tilbake til i oppgavesamlingen.

I de neste avsnittene skal vi ta for oss vektorer i et koordinatsystem. Det du hittil har lært om vektorer, skal du da bruke på vektorer som er gitt ved koordinater. Derfor gir vi en oversikt over noen av hovedpunktene.

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$
- $k\vec{v}$ er ensrettet med $\vec{v}$ dersom $k > 0$, og motsatt rettet hvis $k < 0$
- $k\vec{v} \parallel \vec{v}$ for alle verdier av k
- Når $\vec{u} = k\vec{v}$, så er $\vec{u} \parallel \vec{v}$
- Når $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, så er $\vec{u} \perp \vec{v}$

Nullvektoren har ingen retning. Men for å slippe å gjøre unntak for $k = 0$, $\vec{v} = \vec{0}$ og $\vec{u} = \vec{0}$ i oppgaver og utledninger, sier vi at nullvektoren har en fritt valgt retning. Blant annet er den parallell med og vinkelrett på enhver vektor. Det høres rart ut, men det fører ikke til noen problemer regnemessig sett.

OPPGAVER

6.19
Regn ut $\vec{u} \cdot \vec{v}$ når $|\vec{u}| = 5$ og $|\vec{v}| = 6$, og vinkelen $(\vec{u}, \vec{v})$ er 0°, 30°, 50°, 120°, 150° og 180°.

6.20
Setter du $\vec{d} = \vec{0}$ i (6) blir den siste parentesen redusert til $\vec{c}$. Bruk dette til å finne regneregelen for $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

6.21
En kraft $\vec{F}$ virker på en gjenstand mens den flytter seg 3 meter. $|\vec{F}| = 100$N.
Finn det arbeidet kraften utfører på gjenstanden dersom vinkelen mellom $\vec{F}$ og fartsretningen er

a 0° **b** 30° **c** 60° **d** 150°

6.22
Om to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ vet vi at $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ og $(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$.
Regn ut
a $\vec{a} \cdot \vec{b}$ **b** $\vec{a}^2$ ▲**c** $\vec{a} \cdot (\vec{a} + 1{,}5\vec{b})$
Kommenter svaret i oppgave c.

6.23
Om to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ vet vi at $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 5$ og $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$.

a Regn ut $(\vec{u}, \vec{v})$

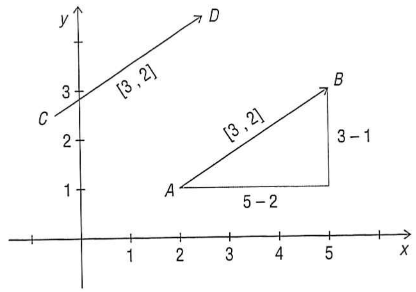
b Regn ut $(\vec{u} + \vec{v})^2$. Hvor lang er $\vec{u} + \vec{v}$?

6.7 VEKTORKOORDINATER

$[a , b] = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y$
Når $P = (x , y)$, er
$\overrightarrow{OP} = [x , y]$

Vi vil bruke vektoren $\overrightarrow{AB}$ på figuren for å forklare hva vi mener med koordinatene til en vektor:

- *Førstekoordinaten* til $\overrightarrow{AB}$ skal vise hvor langt vi går mot venstre eller høyre (parallelt med x-aksen) for å komme fra A til B.
- *Andrekoordinaten* skal vise hvor mye vi går opp eller ned (parallelt med y-aksen).



Figur 6.28

Fra A til B øker x-verdien med $5 - 2 = 3$. y-verdien øker med $3 - 1 = 2$.
For å komme fra A til B må vi altså gå 3 «hakk» (lengdeenheter) mot høyre og 2 hakk opp.
Det betyr at vektoren $\overrightarrow{AB}$ har koordinatene $[3 , 2]$.

NB! Legg merke til at vi bruker hakeparentes rundt vektorkoordinatene. Det er for å skille dem fra punktkoordinater.

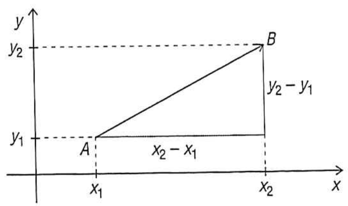
Vi setter likhetstegn mellom en vektor og koordinatene til vektoren. I dette tilfellet kan vi altså skrive $\overrightarrow{AB} = [3 , 2]$.

For å komme fra B til A, må vi gå 3 «hakk» mot venstre og 2 hakk ned. Koordinatene til $\overrightarrow{BA}$ er derfor $[-3 , -2]$.
Minustegnene betyr at vi går til venstre parallelt med x-aksen, og nedover parallelt med y-aksen.

Motsatte vektorer har motsatte koordinater.

$\overrightarrow{CD}$ på figur 6.28 er ensrettet med $\overrightarrow{AB}$ og like lang som $\overrightarrow{AB}$.
De to vektorene er altså like. Da har de også like koordinater.

Figur 6.29



$\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1 , y_2 - y_1]$

Like vektorer har like koordinater, uansett hvor vi tegner dem.

På figur 6.28 fant vi koordinatene til $\overrightarrow{AB}$ ved å trekke koordinatene til A fra koordinatene til B. Dette gjelder generelt.

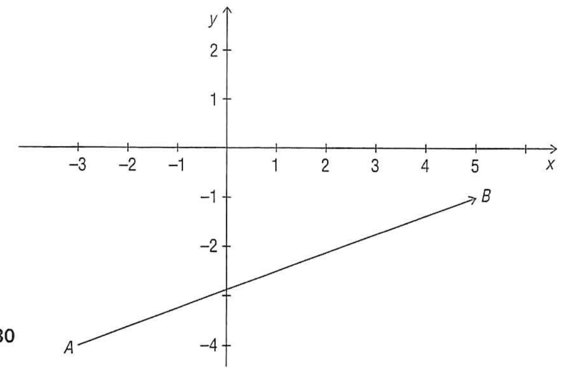
Vektor mellom to punkter
Vektoren fra et punkt $A(x_1 , y_1)$ til et punkt $B\ (x_2 , y_2)$ er gitt ved $\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1 , y_2 - y_1]$ (1)

Eksempel 1

Det er gitt to punkter $A(-3 , -4)$ og $B(5 , -1)$.

$$\overrightarrow{AB} = [5 - (-3) , -1 - (-4)] = [8 , 3]$$
$$\overrightarrow{BA} = [-3 - 5 , -4 - (-1)] = [-8 , -3]$$

Figur 6.30

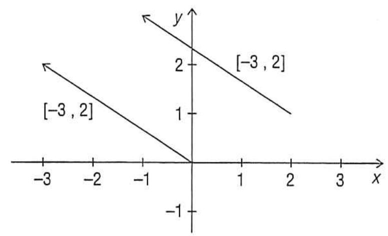


6.24–6.26

Eksempel 2

Vi skal tegne vektoren $\vec{u} = [-3 , 2]$.
Vi kan tegne den hvor vi vil. Nedenfor har vi tegnet den to steder, ut fra origo og ut fra punktet $(2 , 1)$.
Hva er koordinatene til endepunktet i de to tilfellene?

Figur 6.31

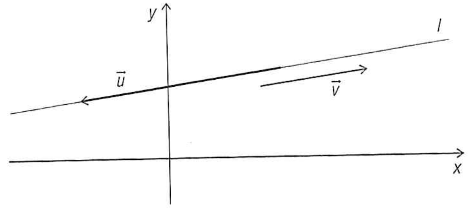


6.27

Retningsvektor for en linje

Vi lar A og B være to punkter på en rett linje l.
Vektoren $\overrightarrow{AB}$ kaller vi en *retningsvektor* for l.
Da A og B kan velges hvor som helst på l, har linja uendelig mange retningsvektorer.

NB! Alle disse vektorene har samme eller motsatt retning, slik at de er *parallelle*.

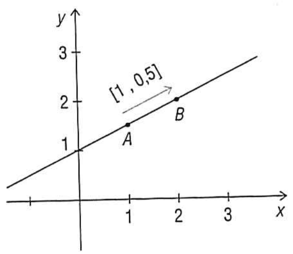


Figur 6.32

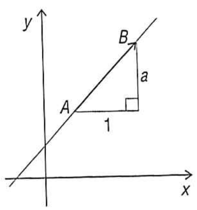
Både $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er retningsvektor for linja l.

Eksempel 3

Vi skal finne en retningsvektor for linja $y = 0{,}5x + 1$.
Vi velger to verdier for x og regner ut y.
For $x = 1$ får vi punktet $A = (1 , 1{,}5)$.
For $x = 2$ får vi $B = (2 , 2)$.
En retningsvektor for linja er da $\overrightarrow{AB} = [2 - 1 , 2 - 1{,}5] = [1 , 0{,}5]$



Figur 6.33



$\overrightarrow{AB} = [1 , a]$

Figur 6.34

Bytter vi ut 0,5 med a og 1 med b i eksempel 3, får vi linja $y = ax + b$ med a som stigningstall og $[1 , a]$ som retningsvektor.

Retningsvektor
En rett linje med a som stigningstall har $[1 , a]$ som retningsvektor.

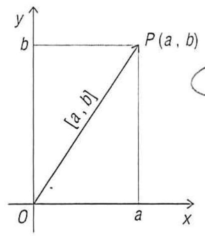
6.28 Når $[1 , a]$ er en retningsvektor for en linje, er også $[k , ka]$ en retningsvektor, forutsatt at $k \neq 0$.

Vektoren $\overrightarrow{OP}$

Vektoren fra origo til et punkt $P(a , b)$, blir

$$\overrightarrow{OP} = [a - 0 , b - 0] = [a , b]$$

Vektoren fra origo til et punkt (a , b) har koordinatene $[a , b]$.



$\overrightarrow{OP} = [a , b]$

Figur 6.35

Denne sammenhengen mellom koordinatene til $\overrightarrow{OP}$ og koordinatene til P får vi ofte bruk for.

NB! Vær bevisst på forskjellen på parentesen for punktkoordinater og parentesen for vektorkoordinater.

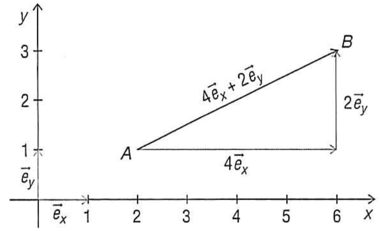
Formell definisjon av vektorkoordinater

Noen ganger trenger vi en mer formell definisjon på vektorkoordinater enn den vi gav ovenfor. For å kunne gi en slik definisjon innfører vi to faste *enhetsvektorer* som alle andre vektorer kan uttrykkes ved. De to enhetsvektorene kaller vi $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$.

- $\vec{e}_x$ er vektoren fra origo til punktet $(1 , 0)$ på x-aksen.
- $\vec{e}_y$ er vektoren fra origo til punktet $(0 , 1)$ på y-aksen.

Definisjonen på vektorkoordinater kan da skrives slik:

$$[x , y] \quad \text{betyr} \quad x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y \qquad (2)$$



Figur 6.36

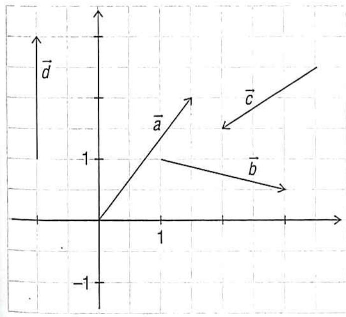
Når vi skriver $\overrightarrow{AB} = [4 , 2]$, er det altså en forkortet skrivemåte for

$$\overrightarrow{AB} = 4 \cdot \vec{e}_x + 2 \cdot \vec{e}_y$$

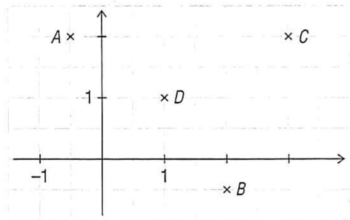
Det følger av (2) at $\vec{e}_x = [1 , 0]$ og $\vec{e}_y = [0 , 1]$.

OPPGAVER

6.24
Finn koordinatene til vektorene på figuren.



6.25
Bestem koordinatene til $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{CD}$ på figuren.



6.26
Regn ut koordinatene til vektoren $\overrightarrow{AB}$ når
a $A = (2, 1)$ og $B = (4, 3)$
b $A = (-3, 2)$ og $B = (6, 1)$
c $A = (-4, 5)$ og $B = (4, 5)$
d $A = (5, 4)$ og $B = (-3, 2)$

6.27
Tegn vektorene $[-1, 2]$, $[2, -2]$, $[3, 0]$ og $[-3, -1]$.

6.28
$A\ (2, 1)$ og $B\ (5, 3)$ er to punkter på en linje l.
a Finn koordinatene til $\overrightarrow{AB}$.
b Finn stigningstallet til linja l.
c Hvilken sammenheng er det mellom svarene på oppgave a og b?
d Vi lar $\vec{v} = [a, b]$ være retningsvektor for en linje m. Finn stigningstallet til m.

6.29
Skriv opp koordinatene til vektorene
a $4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$
b $-\vec{e}_x - 5\vec{e}_y$
c $-2\vec{e}_x$
d $5\vec{e}_y$

6.30
Forklar at $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$.

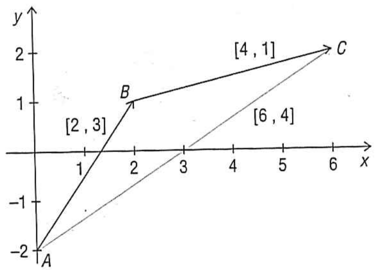
6.8 REGNEREGLER FOR VEKTORKOORDINATER

$[2, 6] + [3, 1] = [5, 7]$
$3 \cdot [4, 2] = [12, 6]$

Addisjon, subtraksjon og vektor multiplisert med tall

Eksempel 1

På figuren har vi tegnet vektorene $\overrightarrow{AB} = [2, 3]$ og $\overrightarrow{BC} = [4, 1]$.
Vi skal finne koordinatene til vektorsummen $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.



Figur 6.37

$[2, 3] + [4, 1] = [2 + 4, 3 + 1]$

For å komme fra A til C må vi gå 2 + 4 hakk mot høyre, og 3 + 1 hakk oppover. Summen av vektorene er derfor

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = [2, 3] + [4, 1] = [2 + 4, 3 + 1] = [6, 4]$$

Eksempel 1 viser hvordan vi kan addere to vektorer ved å addere førstekoordinatene for seg og andrekoordinatene for seg.

Men i eksemplet gikk begge vektorene til høyre og oppover.
Vi skal nå vise at regelen gjelder generelt.
Vi skal finne summen av vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ når

$$\vec{u} = [x_1, y_1] \quad \text{og} \quad \vec{v} = [x_2, y_2]$$

Vi får

$$\vec{u} + \vec{v} = [x_1, y_1] + [x_2, y_2] = (x_1 \cdot \vec{e}_x + y_1 \cdot \vec{e}_y) + (x_2 \cdot \vec{e}_x + y_2 \cdot \vec{e}_y)$$
$$= (x_1 + x_2)\vec{e}_x + (y_1 + y_2)\vec{e}_y$$

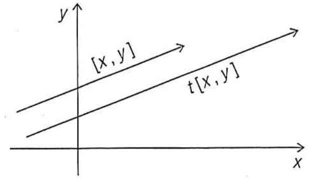
Dette gir oss denne addisjonsregelen:

Addisjon av vektorer
$$[x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2] \qquad (1)$$

Vi får summen av to vektorer ved å addere førstekoordinatene for seg og andrekoordinatene for seg.

Her er to andre setninger du får mye bruk for:

$$[x_1, y_1] - [x_2, y_2] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2] \qquad (2)$$
$$t \cdot [x, y] = [tx, ty] \qquad (3)$$



Figur 6.39

Den siste setningen kan vi bevise slik:

$$t \cdot [x, y] = t \cdot (x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y) = tx \cdot \vec{e}_x + ty \cdot \vec{e}_y = [tx, ty]$$

Vektoren $[tx, ty]$ er $|t|$ ganger så lang som $[x, y]$ og parallell med $[x, y]$, uansett hvilket tall t er.

Som regel lar vi $[x, y]$ bety koordinatene til en vilkårlig vektor, slik som i (3) ovenfor. Men vil vi holde to vilkårlige vektorer fra hverandre, kan vi for eksempel la koordinatene til de to vektorene være $[x_1, y_1]$ og $[x_2, y_2]$, som i (1) og (2).

Eksempel 2

Det er gitt to vektorer $\vec{u} = [5, -2]$ og $\vec{v} = [-1, 4]$.
Vi vil finne koordinatene til vektoren $3\vec{u} + 2\vec{v}$.

6.31

$$3\vec{u} + 2\vec{v} = 3 \cdot [5, -2] + 2 \cdot [-1, 4] = [15, -6] + [-2, 8] = [13, 2]$$

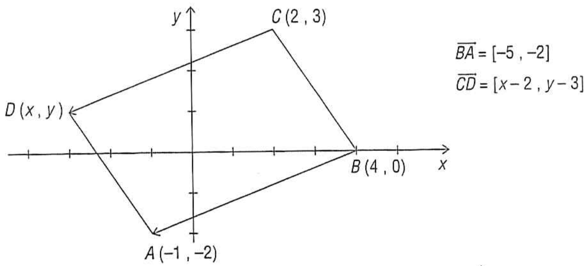
Like vektorer

To like vektorer har samme førstekoordinat og samme andrekoordinat.

$$[x_1, y_1] = [x_2, y_2]$$
$$\Updownarrow$$
$$x_1 = x_2 \quad \text{og} \quad y_1 = y_2 .$$

Eksempel 3

Gitt tre punkter $A(-1\,,-2)$, $B(4\,,0)$ og $C(2\,,3)$.
Vi vil finne et punkt D slik at $ABCD$ blir et parallellogram med AC som diagonal.



Figur 6.40

Kravet til D er oppfylt dersom $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.
Vi setter D lik $(x\,,y)$. Da får vi $\overrightarrow{CD} = [x-2\,,y-3]$.
Det gir

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$$
$$\Updownarrow$$
$$[x-2\,,y-3] = [-5\,,-2]$$
$$\Updownarrow$$
$$x-2 = -5 \quad \text{og} \quad y-3 = -2$$
$$\Updownarrow$$
$$x = -3 \quad \text{og} \quad y = 1$$

6.32 D har koordinatene $(-3\,,1)$.

Eksempel 4

Gitt tre vektorer $\vec{v}_1 = [x\,,5]$, $\vec{v}_2 = [3\,,y]$ og $\vec{v} = [2\,,7]$.

Vi vil bestemme x og y slik at $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}$. Det betyr at koordinatene til $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ skal være lik koordinatene til $\vec{v}$.

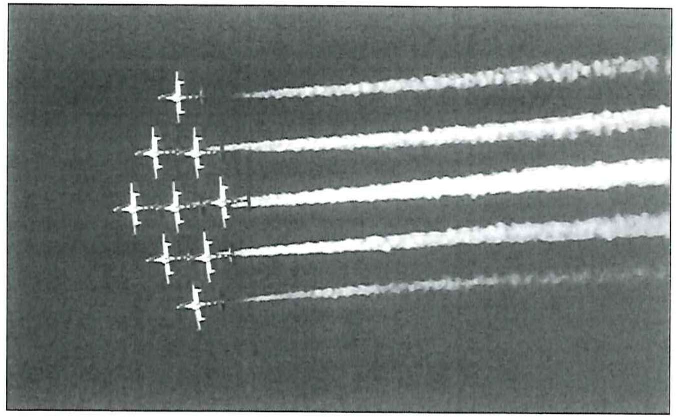
$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}$$
$$[x\,,5] + [3\,,y] = [2\,,7]$$
$$[x+3\,,5+y] = [2\,,7]$$

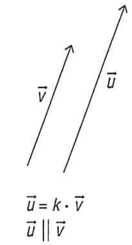
En vektorlikning blir til to tallikninger

$$x+3 = 2 \quad \text{og} \quad 5+y = 7$$
$$x = -1 \quad \text{og} \quad y = 2$$

NB! I eksempel 4 startet vi med en vektorlikning med to ukjente. Den
6.33 gjorde vi om til et likningssett med to vanlige tallikninger.

Parallelle vektorer





Figur 6.41

Vi vet at $\vec{v}$ og $k\vec{v}$ er parallelle.
To vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er derfor parallelle hvis det fins et tall k slik at $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$. På koordinatform kan dette uttrykkes slik:

$$[x_1\,,y_1] \parallel [x_2\,,y_2]$$
$$\Updownarrow$$
$$[x_1\,,y_1] = k \cdot [x_2\,,y_2]$$
$$\Updownarrow$$
$$x_1 = k \cdot x_2 \quad \text{og} \quad y_1 = k \cdot y_2$$

$\vec{u} = k \cdot \vec{v}$

Eksempel 5

Vi vil velge y slik at vektoren $[9\,,y]$ blir parallell med $[7\,,3]$.

$$[9\,,y] \parallel [7\,,3]$$
$$[9\,,y] = k[7\,,3]$$
$$[9\,,y] = [7k\,,3k]$$
$$9 = 7k \quad \text{og} \quad y = 3k$$
$$k = \frac{9}{7} \quad \text{og} \quad y = 3 \cdot \frac{9}{7}$$
$$y = \frac{27}{7}$$

OPPGAVER

6.31
Gitt tre vektorer $\vec{v}_1 = [1\ ,-3]$, $\vec{v}_2 = [2\ ,3]$ og $\vec{v}_3 = [-1\ ,5]$
Regn ut koordinatene til
a $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$
b $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$
c $2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 + \vec{v}_3$
d $\vec{v}_1 - \frac{1}{2}\vec{v}_2 + \frac{3}{2}\vec{v}_3$

6.32
Tre hjørner i et parallellogram er $A\ (-1\ ,1)$, $B\ (2\ ,-0)$ og $C\ (3\ ,2)$. Finn koordinatene til det fjerde hjørnet D når AC er en diagonal.

6.33
Løs likningene.
a $[x\ ,2] + [2\ ,y] = [3\ ,3]$
b $x \cdot [3\ ,4] + y \cdot [5\ ,-1] = [1\ ,9]$
c $[-1\ ,5] + [x\ ,y] = [5\ ,0]$
d $2 \cdot [x\ ,1] + [2\ ,-3] = 3 \cdot [1\ ,y]$

6.34
Undersøk om $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle når
a $\vec{u} = [2\ ,-3]$ og $\vec{v} = [-4\ ,5]$
b $\vec{u} = [-3\ ,7]$ og $\vec{v} = [9\ ,-21]$

6.35
En firkant har hjørnene $A(-3\ ,1)$, $B(3\ ,-1)$, $C(2\ ,1)$ og $D(0\ ,2)$.
a Tegn firkanten i et koordinatsystem
b Undersøk om firkanten er et trapes.

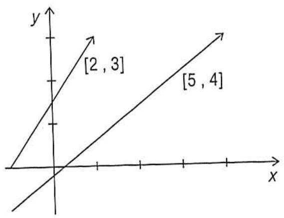
▲ 6.36
Tegn to vektorer $\vec{a} = [2\ ,1]$ og $\vec{b} = [-1\ ,2]$.
a Vis at vektoren $\vec{a} + t\vec{b}$ har koordinatene $[2 - t\ ,1 + 2t]$.
b Undersøk om det fins et tall t slik at $\vec{a} + t\vec{b}$ er parallell med
1 $[1\ ,1]$ 2 $[2\ ,-4]$

▲ 6.37
Gitt fire punkter $A(5\ ,0)$, $B(5\ ,4)$, $C(4\ ,0)$ og $D(4\ ,-5)$.
a Tegn figur og vis at trekantene OAB og OCD har samme form og størrelse.
b Vis at $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OD}$.
c Hva kan du si om skalarproduktet $[5\ ,4] \cdot [4\ ,-5]$?

6.9 SKALARPRODUKT PÅ KOORDINATFORM

$[2\ ,3] \cdot [5\ ,7] = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7$
$|[2\ ,3]| = \sqrt{2^2 + 3^2}$

Vi skal nå finne en generell formel for skalarproduktet av to vektorer gitt på koordinatform. Først ser vi på skalarproduktet $[2\ ,3] \cdot [5\ ,4]$.



Figur 6.43

Vi bruker definisjonen (2) på side 227 og (6) på side 221. Da får vi

$$[2\ ,3] \cdot [5\ ,4] = (2\,\vec{e}_x + 3\,\vec{e}_y) \cdot (5\,\vec{e}_x + 4\,\vec{e}_y)$$
$$= 2 \cdot 5\,\vec{e}_x^{\,2} + 2 \cdot 4\,\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y + 3 \cdot 5\,\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x + 3 \cdot 4\,\vec{e}_y^{\,2}$$

$\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$ står vinkelrett på hverandre. Derfor er $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y$ og $\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x$ lik null. (Se side 220.)
Dessuten vet vi at $\vec{e}_x^{\,2} = |\vec{e}_x|^2 = 1$ og $\vec{e}_y^{\,2} = |\vec{e}_y|^2 = 1$.
Skalarproduktet blir derfor $2 \cdot 5 + 3 \cdot 4$.
Dette viser at

$$[2\ ,3] \cdot [5\ ,4] = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4$$

Denne likningen gir oss mønstret til den formelen vi skal fram til. Ser du en sammenheng? Prøv å gi svaret før du leser videre.

Med vektorene $[x_1\ ,y_1]$ og $[x_2\ ,y_2]$ i stedet for $[2\ ,3]$ og $[5\ ,4]$ er det bare å bytte ut tallet 2 med x_1, 3 med y_1 osv. i utregningen ovenfor. Svaret blir da $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

Formel for skalarproduktet
$$[x_1\ ,y_1] \cdot [x_2\ ,y_2] = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \qquad (1)$$

Eksempel 1
Vi tar for oss skalarproduktet $[3\ ,-2] \cdot [4\ ,6]$.

$$[3\ ,-2] \cdot [4\ ,6] = 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 6 = 0$$

6.38 Skalarproduktet er null. Det viser at $[3\ ,-2] \perp [4\ ,6]$.

Lengden av en vektor

Setter vi $\vec{v} = [x\ ,y]$, følger det av (1) at $\vec{v}^{\,2} = [x\ ,y] \cdot [x\ ,y] = x^2 + y^2$.

$$\vec{v}^{\,2} = x^2 + y^2$$

$\sqrt{\vec{v}^{\,2}} = |\vec{v}|$

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Lengden av vektoren $[x\ ,y]$:

$$|[x\ ,y]| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (2)$$

Eksempel 2
Vi vil finne lengden av vektoren $[-6\ ,8]$.

6.39 $|[-6\ ,8]| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

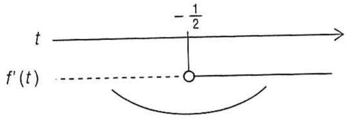
Eksempel 3

Vi vil bestemme t slik at vektoren $\vec{v} = [3+t\,,\,2-t]$ blir kortest mulig.
Først finner vi et uttrykk for lengden av $\vec{v}$.

$$|\vec{v}| = \sqrt{(3+t)^2+(2-t)^2} = \sqrt{2t^2+2t+13}$$

Den minste verdien for $|\vec{v}|$ får vi når radikanden er minst mulig.
Vi setter radikanden lik $f(t)$ og deriverer.

$$f(t) = 2t^2+2t+13$$
$$f'(t) = 4t+2$$



Figur 6.44

Vi ser at $f(t)$ er minst når $t = -\dfrac{1}{2}$.

Regn ut $|\vec{v}|$ for denne t-verdien.

Eksempel 4

Vi skal bestemme t slik at vektoren $t\,[4\,,\,3]$ får lengden 10 og samme retning som $[4\,,\,3]$.
Først finner vi et uttrykk for lengden av $t\,[4\,,\,3]$.

$$\big|t[4\,,3]\big| = \big|[4t\,,3t]\big| = \sqrt{(4t)^2+(3t)^2} = \sqrt{25t^2} = 5\sqrt{t^2}$$

For at $t\,[4\,,\,3]$ skal ha samme retning som $[4\,,\,3]$, må $t > 0$.

$$5\sqrt{t^2} = 10$$
$$5t = 10$$
$$t = 2$$

$\sqrt{t^2} = t$ når $t > 0$

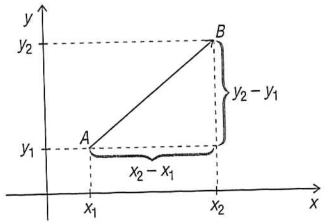
Vektoren blir $2 \cdot [4\,,\,3] = [8\,,\,6]$

Avstanden mellom to punkter

Vi vil finne avstanden mellom to punkter $A = (x_1\,,\,y_1)$ og $B = (x_2\,,\,y_2)$.

Da $\overrightarrow{AB} = [x_2-x_1\,,\,y_2-y_1]$, får vi

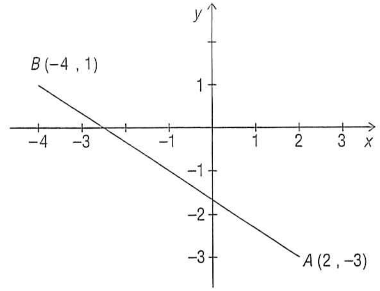
$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{3}$$



Figur 6.45

Eksempel 5

Vi vil finne avstanden mellom punktene $A(2\,,\,-3)$ og $B(-4\,,\,1)$.



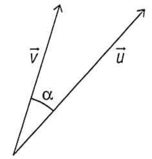
Figur 6.46

Av avstandsformelen ovenfor får vi

6.40

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4-2)^2+(1-(-3))^2} = \sqrt{52} = 7{,}21$$

Vinkelen mellom to vektorer



$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$

Figur 6.47

Vi lar α være vinkelen mellom to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

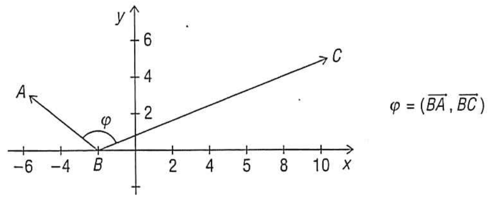
Av definisjonen på skalarprodukt får vi at

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \quad \text{der } \alpha = (\vec{u}\,,\vec{v}) \tag{4}$$

NB! Da vinkelen mellom to vektorer alltid ligger i intervallet [0°, 180°], er det bare én vinkel som passer til den cosinusverdien vi finner.

Eksempel 6

Gitt tre punkter $A = (-6\,,\,3)$, $B = (-2\,,\,0)$ og $C = (10\,,\,5)$.
Vi skal bestemme vinkelen ABC, som vi kan kalle φ.



Figur 6.48

φ er det samme som vinkelen mellom vektorene $\overrightarrow{BA}$ og $\overrightarrow{BC}$.

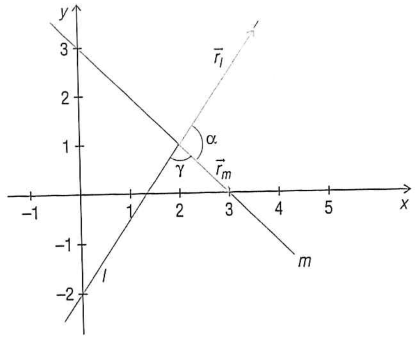
6.41–6.42

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{[-4\,,3]\cdot[12\,,5]}{\sqrt{16+9}\cdot\sqrt{144+25}}$$
$$= \frac{-33}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{169}} = \frac{-33}{5\cdot 13} = \frac{-33}{65}$$
$$\angle ABC = 120{,}5°$$

Eksempel 7

Vi skal bruke skalarprodukt til å regne ut vinkelen mellom linjene
l: $y = 1{,}5x - 2$ og m: $y = -x + 3$.
Først finner vi en retningsvektor for hver av linjene, se side 225.

- Retningsvektor: $\vec{r}_l = [1\,,\,1{,}5]\cdot 2 = [2\,,\,3]$
- Retningsvektor: $\vec{r}_m = [1\,,\,-1]$



Figur 6.49

Vi lar α være vinkelen mellom $\vec{r}_l$ og $\vec{r}_m$.
Ved å bruke formelen ovenfor får vi at

$$\cos\alpha = \frac{[2\,,3]\cdot[1\,,-1]}{\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{26}} = -0{,}196$$

$$\alpha = 101{,}3°$$

Dette er vinkelen mellom de to retningsvektorene vi valgte.

Men det er to mulige vinkler mellom to gitte linjer – den ene større enn 90°, den andre mindre. Det er vanlig å oppgi den minste.
Den minste vinkelen mellom l og m er her

$$\gamma = 180° - \alpha = 180° - 101{,}3° = 78{,}7°$$

Hvis vi hadde valgt [2 , 3] og [–1 , 1] som retningsvektorer, ville vi ha fått vinkelen γ direkte.

OPPGAVER

6.38
Regn ut skalarproduktet $\vec{u}\cdot\vec{v}$ når
a $\vec{u} = [5\,,-2]$ og $\vec{v} = [3\,,2]$
b $\vec{u} = [-1\,,3]$ og $\vec{v} = [6\,,-2]$

6.39
Finn lengden av vektorene [4 , –3], [5 , –12] og [24 , 7].

6.40
Regn ut lengden av sidene i trekanten ABC når $A = (1\,,1)$, $B = (2\,,3)$ og $C = (3\,,2)$.

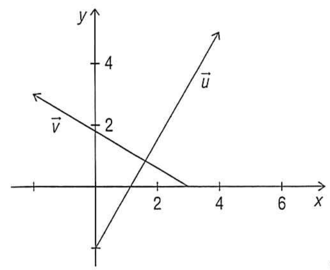
6.41
Finn $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ og vinkelen $(\vec{u}\,,\vec{v})$ når
a $\vec{u} = [3\,,-4]$ og $\vec{v} = [6\,,-3]$
b $\vec{u} = [3\,,-2]$ og $\vec{v} = [2\,,-1]$

6.42
Regn ut vinklene i trekanten ABC når
a $A = (1\,,1)$, $B = (2\,,3)$ og $C = (3\,,2)$
b $A = (3\,,1)$, $B = (-1\,,5)$ og $C = (-3\,,-1)$

▲ 6.43
Finn en retningsvektor for hver av linjene og bruk dette til å regne ut vinkelen mellom linjene
a $y = 2x - 3$ og $y = -0{,}5x + 1$
b $y = 1{,}5x - 1$ og $y = -x$
c $y = \sqrt{3}x - 2$ og $x = 3$

6.10 ORTOGONALE VEKTORER

Blir du skremt av overskriften?
At to vektorer er *ortogonale*, betyr bare at de står vinkelrett på hverandre.



Figur 6.50

Vi skal undersøke om vektorene $\vec{u} = [4\,,7]$ og $\vec{v} = [-5\,,3]$ er ortogonale.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = [4\,,7]\cdot[-5\,,3] = -20 + 21 = 1$$

Skalarproduktet er ikke null. Da vet vi at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ikke står vinkelrett på hverandre. De er altså ikke ortogonale.
Er vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$ mindre enn eller større enn 90°?

6.44–6.48

Eksempel 1

Vi skal bestemme b slik at vektoren $\vec{u} = [4\,,7]$ står vinkelrett på $\vec{v} = [-5\,,b]$.
Vi skal altså bestemme b slik at skalarproduktet av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ blir null.

$$\vec{u} \perp \vec{v}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

$$[4\,,7]\cdot[-5\,,b] = 0$$

$$-20 + 7b = 0$$

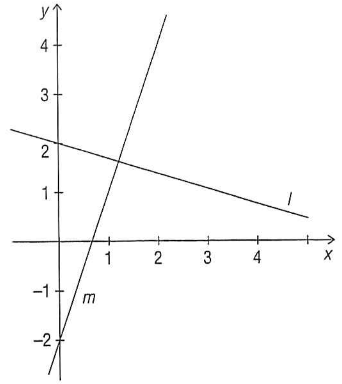
$$b = \frac{20}{7}$$

Vektorene [4 , 7] og $\left[-5\,,\frac{20}{7}\right]$ er ortogonale.

Kontroller svaret ved å regne ut $[4\,,7]\cdot\left[-5\,,\frac{20}{7}\right]$.

Eksempel 2

Vi vil bruke skalarprodukt til å bestemme a slik at linja l: $y = ax + 2$ står vinkelrett på linja m: $y = 3x - 2$.



Figur 6.51

- Retningsvektor: $\vec{r}_l = [1, a]$
- Retningsvektor: $\vec{r}_m = [1, 3]$

$l \perp m$

$[1, a] \cdot [1, 3] = 0$

$1 + 3a = 0$

$a = -\frac{1}{3}$

Linjene l og m står vinkelrett på hverandre dersom $a = -\frac{1}{3}$.

OPPGAVER

6.44
Undersøk om noen av disse vektorene står vinkelrett på hverandre:
$\vec{r} = [-9, 12]$ $\vec{s} = [-4, 3]$ $\vec{u} = [8, 6]$

6.45
Bruk skalarprodukt til å vise at $[a, b]$ og $[b, -a]$ står vinkelrett på hverandre.

6.46
En trekant har hjørnene $A(-1, -3)$, $B(5, 2)$ og $C(0, 8)$.
Undersøk om trekanten er rettvinklet.

▲ 6.47
Finn minst to vektorer som står vinkelrett på vektoren $[2, 5]$.

▲ 6.48
Gitt en vektor $\vec{v} = [a, b]$. Bestem koordinatene til en vektor $\vec{u}$ slik at $\vec{v} \perp \vec{u}$.

▲ 6.49
Vektorene $\vec{a} = [6, 3]$, $\vec{b} = [4, -2]$ og $\vec{c} = [3, 2]$ er gitt.
Bestem t slik at $\vec{a} + t\vec{b} \perp \vec{c}$.

6.11 PARAMETERFRAMSTILLING

Likningen nedenfor framstiller en rett linje som skjærer andreaksen for $y = 2$, og har 0,5 som stigningstall.
Dette er et eksempel på det vi kaller *likningsframstilling*.

$$y = 0{,}5x + 2 \qquad (1)$$

Vi skal nå ta for oss en annen måte å framstille kurver på. Den kalles *parameterframstilling*.

Når vi bruker parameterframstilling, skriver vi x og y som funksjoner av en tredje variabel – en «hjelpevariabel» – som kalles *parameter*.
Vi bruker gjerne t som parameter, men vi kan også bruke andre bokstaver.
(Lommeregneren bruker T. Du finner den på samme tast som X.)

Alle kurver som kan framstilles ved en likning, kan også framstilles ved en parameterframstilling. I tillegg kan vi bruke parameterframstilling til å framstille kurver der vi *ikke* kan uttrykke sammenhengen mellom x og y med en likning.

Å tegne grafen til en parameterframstilling

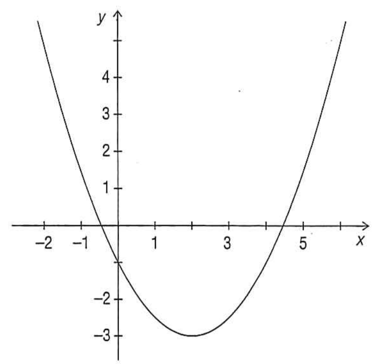
For å vise hvordan en parameterframstilling virker i praksis, skal vi tegne en kurve s gitt ved parameterframstillingen

$$s: \quad x = t + 2 \;\wedge\; y = 0{,}5 \cdot t^2 - 3$$

Tegnet $\wedge$ står for *og*. (Det blir kalt *konjunksjonstegn.*)

Vi lager en tabell med noen samsvarende verdier av t, x og y.

t	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
x	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
y	5	1,5	–1	–2,5	–3	–2,5	–1	1,5	5



Figur 6.52

Vi tegner inn punktene $(-2, 5)$, $(-1, 1{,}5)$ osv. på vanlig måte i et koordinatsystem og trekker en linje gjennom punktene.
Du ser kanskje av tabellen hva slags kurve det blir?

Parameterframstilling på lommeregneren

Vi skal nå vise hvordan du kan tegne grafen til parameterframstillingen ovenfor på lommeregneren.

CASIO

Du må være i GRAPH-menyen. Trykk F3 (TYPE) F3 (Parm).
Tasten for variabelen t er X,θ,T. Fjern eller deaktiver eventuelle tidligere funksjoner.
Skriv $t + 2$ ut for Xt1 og $0{,}5t^2 - 3$ ut for Yt1.
(Du kan også bruke Xt2 og Yt2, osv.)
Du må velge ytterverdier for t. Trykk V-WINDOW og bla deg nedover til T, θ. Velg –4 for T, θmin og 4 for T, θmax. La pitch få verdien 1.
Trykk EXE og F6 (DRAW).
Trykk ZOOM F5 (AUTO). Du ser nå grafen for de t-verdiene du har valgt.
(I V-Window kan du se hvilke ytterverdier lommeregneren har valgt for x og y.)

TEXAS

Trykk MODE ▼ ▼ ▼ ▶ (Par) ENTER CLEAR Y= .
Tasten for variabelen t er X,θ,T,n .
Fjern eller deaktiver eventuelle tidligere funksjoner.
Skriv $t + 2$ ut for X_{1T} og $0{,}5t^2 - 3$ ut for Y_{1T}.
(Du kan også bruke X_{2T} og Y_{2T}, osv.)
Du må velge ytterverdier.
Trykk WINDOW . Velg –4 for Tmin og 4 for Tmax. La Tstep få verdien 1. Trykk ENTER .
Du kan la lommeregneren tilpasse ytterverdiene for x og y til de t-verdiene du har valgt.
Trykk ZOOM 0 (ZoomFit). Du ser nå grafen for de t-verdiene du har valgt.
(I WINDOW kan du se hvilke ytterverdier lommeregneren har valgt for x og y.)

Kommentar
Hvis du vil se samsvarende verdier mellom t, x og y, kan du gå inn i tabellfunksjonen på lommeregneren. Sammenlikn med tabellen på forrige side.

Tips
Eksperimenter med forskjellige verdier for pitch (Tstep) i V-Window
6.51 (WINDOW) for å se hvilken betydning valget har for grafen.

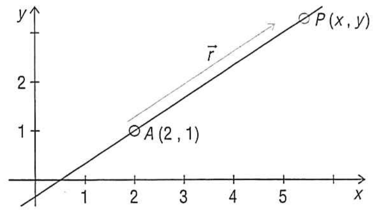
Parameterframstilling for rette linjer

Når vi skal finne en parameterframstilling for en rett linje, kan vi ta utgangspunkt i en *retningsvektor* og et *fast punkt* på linja.

Vi skal finne en parameterframstilling for en rett linje l som går gjennom punktet $A(2\,,1)$ og har stigningstallet $\frac{2}{3}$.

Stigningstallet $\frac{2}{3}$ svarer til retningsvektoren $\left[1\,,\frac{2}{3}\right]$. Men vi kan like gjerne bruke $\vec{r} = [3\,,2]$ som retningsvektor, for $\vec{r}$ er parallell med $\left[1\,,\frac{2}{3}\right]$.

Det faste punktet er her A.



Figur 6.53

Vi lar $P(x\,,y)$ være et vilkårlig punkt på l. Da vet vi at $\overrightarrow{AP} = [x-2\,,y-1]$ er parallell med $\vec{r}$, slik at $\overrightarrow{AP} = t\cdot\vec{r}$.

Vi setter inn vektorkoordinatene for $\overrightarrow{AP}$ og $\vec{r}$. Da får vi

$$\overrightarrow{AP} = t\cdot\vec{r}$$
$$[x-2\,,y-1] = t\cdot[3\,,2]$$
$$[x-2\,,y-1] = [3t\,,2t]$$
$$x-2 = 3t \quad\wedge\quad y-1 = 2t$$

Vi flytter over konstantleddene og får en parameterframstilling for l.

$$l:\quad x = 3t+2 \quad\wedge\quad y = 2t+1 \qquad (2)$$

Kontroll: $t = 0$ gir $(x\,,y) = (2\,,1)$, som er det faste punktet A. Setter vi $t = 1$, får vi punktet $(5\,,3)$, som sammen med A gir retningsvektoren $[3\,,2]$, og dermed stigningstallet $\frac{2}{3}$.

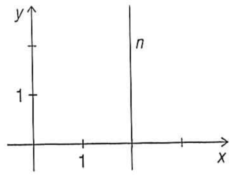
NB! Hadde vi brukt et annet fast punkt på linja l, eller en annen retningsvektor, ville vi ha fått en annen parameterframstilling for l. Med $(8\,,5)$ som fast punkt og $[-3\,,-2]$ som retningsvektor, ville vi ha fått

$$x = -3t+8 \quad\wedge\quad y = -2t+5 \qquad (3)$$

Kontroller at også dette er en riktig parameterframstilling for l.

Selv om (2) og (3) er parameterframstilling for samme linje, kan vi ikke regne med at samme t-verdi i (2) og (3) gir samme punkt. For eksempel vil $t = 3$ gi punktet (11 , 7) når vi setter inn i (2), og punktet (–1 , –1) når vi setter inn i (3).
Hvilken verdi må du sette inn for t i (3) for å få punktet (11 , 7)?

Eksempel 1



Figur 6.54

Vi skal sette opp en parameterframstilling for en normal n på x-aksen i punktet (2 , 0).

Likningen for n er $x = 2$, fordi alle punkter på n har 2 som førstekoordinat, mens andrekoordinaten kan være hva som helst.
I en parameterframstilling kan dette uttrykkes slik:

$$x = 2 \quad \wedge \quad y = t \tag{4}$$

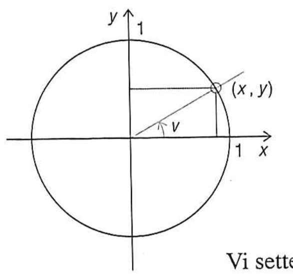
Men vi kunne like gjerne ha skrevet

$$x = 2 \quad \wedge \quad y = 4t \tag{5}$$

Setter vi for eksempel 5 for t i (4), får vi punktet (2 , 5).
Velger vi $\frac{5}{4}$ for t i (5), får vi det samme punktet.

Eksempel 2

Vi skal finne en parameterframstilling for en sirkel om origo med radius lik 1, det vil si enhetssirkelen.
Denne parameterframstillingen får vi direkte av definisjonen på sinus og cosinus.



Figur 6.55

Vi lar (x , y) være et vilkårlig punkt på sirkelen. Videre lar vi den rette linja fra origo til punktet (x , y) være andrebeinet til en vinkel v i grunnstilling. Da vet vi fra side 90 at

$$\cos v = x \quad \text{og} \quad \sin v = y$$

Bytter vi om sidene i de to likningene, får vi en parameterframstilling for sirkelen med v som parameter:

$$x = \cos v \quad \wedge \quad y = \sin v \tag{6}$$

Vi setter opp en tabell for noen samsvarende verdier mellom v, x og y.

v	0°	30°	60°	90°	135°	180°	210°	270°	315°	360°
x	1	0,87	0,5	0	–0,71	–1	–0,87	0	0,71	1
y	0	0,5	0,87	1	0,71	0	–0,5	–1	–0,71	0

Legg merke til at i denne parameterframstillingen har parameteren en tolkning. Den er vinkelen mellom x-aksen og en rett linje fra origo til punktet (x , y) på kurven. Parameterframstillingen viser altså hvilke v-verdier som gir de enkelte x- og y-verdiene på sirkelen.

OPPGAVER

6.50
En kurve er gitt ved
$x = t + 1 \quad \wedge \quad y = -0{,}5t^2 + 2t + 3$
Lag en tabell med samsvarende verdier av t, x og y. Velg t-verdier fra –2 til 6.
Tegn kurven på papir.

6.51
Tegn kurven i forrige oppgave på lommeregneren.

6.52
Finn en parameterframstilling for en rett linje som går gjennom punktet (2 , 3) og har [–2 , 1] som retningsvektor. Tegn linja.

6.53
Finn en parameterframstilling for en rett linje som går gjennom punktene
a (0 , –2) og (3 , 4) **b** (–3 , 0) og (1 , 6)
c (3 , 4) og (–2 , –6) **d** (–2 , 3) og (2 , 3)

6.54
Setter du $t = -2$ i (2) på side 241, får du punktet (–4 , –3). Hvilken t-verdi må du sette i (3) for å få dette punktet?

6.55
Finn en retningsvektor til linja
$x = -3t - 2 \quad \wedge \quad y = 2t + 1$.
Hva er stigningstallet?

6.12 REGNING MED PARAMETERE

Retningsvektor for en rett linje

Vi tar for oss parameterframstillingen for kurven

$$m\colon\ x = 3t - 1 \quad \wedge \quad y = -2t + 4$$

Hvis vi velger en t-verdi, og så lar t øke med 1, vil x øke med 3 og y minke med 2.
Hver gang x øker med 3, minker altså y med 2. Det viser at m er en rett linje med $-\frac{2}{3}$ som stigningstall.

Da $[1 , -\frac{2}{3}] \parallel [3 , -2]$, er $[3 , -2]$ en retningsvektor for m.

Ser du hvordan du kan lese denne retningsvektoren direkte av parameterframstillingen?

Skjæring med aksene

Vi vil finne skjæringspunktet mellom x-aksen og linja m ovenfor.
I dette skjæringspunktet er y lik null.

$$y = 0$$
$$-2t + 4 = 0$$
$$t = 2$$

Vi setter $t = 2$ inn i uttrykket for x og får

$$x = 3 \cdot 2 - 1 = 5$$

Skjæringspunktet med x-aksen er (5 , 0).

For å finne skjæringspunktet med y-aksen setter vi $x = 0$ og finner t.
Denne t-verdien setter vi inn i uttrykket for y.
Finn skjæringspunktet.

6.56, 6.57 Tegn linja m på lommeregneren, og kontroller skjæringspunktene.

Lives problem

Live ville finne skjæringspunktet mellom linjene m og l.

$$m:\ x = 3t - 1 \ \wedge\ y = -2t + 4 \qquad (1)$$

$$l:\ x = 2t - 4 \ \wedge\ y = t - 1 \qquad (2)$$

Jeg må finne den t-verdien som gir samme x-verdi og samme y-verdi for de to linjene, tenkte Live. Altså må jeg løse et likningssett.

$$3t - 1 = 2t - 4 \ \wedge\ -2t + 4 = t - 1 \qquad (3)$$

$$t = -3 \ \wedge\ 3t = 5$$

$$t = -3 \ \wedge\ t = \frac{5}{3}$$

t kan ikke være både -3 og $\frac{5}{3}$ på én gang, tenkte Live. Altså stemmer ikke (3) for noen verdi av t, og det betyr at de to linjene ikke skjærer hverandre!
Men hun fikk ikke det til å stemme heller, for linjene hadde ikke samme stigningstall.
Hun tegnet grafene på lommeregneren og fikk bekreftet at de skar hverandre!

Etter å ha grublet en stund, skjønte hun det. Hun hadde ikke regnet feil, hun hadde tenkt feil!

Skjæringspunkt mellom to kurver

Live hadde rett i at de to parameterframstillingene har samme x-verdi og samme y-verdi i skjæringspunktet. Men hun hadde oversett én ting: Parameterframstillingene har ikke nødvendigvis samme t-verdi i skjæringspunktet.

For å finne skjæringspunktet må vi finne en t-verdi i (1) og en t-verdi i (2) som gir samme x-verdi og samme y-verdi. Men det er vanskelig å holde parametrene fra hverandre når de har samme navn. Derfor bytter vi ut t med s i den ene framstillingen og får

$$m:\ x = 3t - 1 \ \wedge\ y = -2t + 4$$

$$l:\ x = 2s - 4 \ \wedge\ y = s - 1$$

Da får vi dette likningssettet:

$$3t - 1 = 2s - 4 \ \wedge\ -2t + 4 = s - 1$$

- Av den siste likningen får vi $s = -2t + 5$.
- Dette setter vi inn i den første likningen, og får

$$3t - 1 = 2(-2t + 5) - 4$$

$$3t - 1 = -4t + 10 - 4$$

$$t = 1$$

Det gir $s = -2 \cdot 1 + 5 = 3$.

Vi bruker den ene parameterverdien til å finne skjæringspunktet. Den andre bruker vi til kontroll.

$$t = 1: \quad x = 3 \cdot 1 - 1 = 2 \ \wedge\ y = -2 \cdot 1 + 4 = 2$$

Skjæringspunktet er $(2 , 2)$.

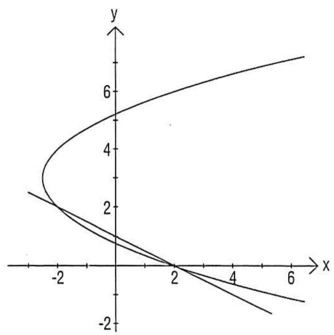
6.58a – c Kontroll: $s = 3$: $x = 2 \cdot 3 - 4 = 2 \ \wedge\ y = 3 - 1 = 2$

Eksempel 1

Vi tar for oss kurvene

$$p:\ x = 0{,}5t^2 - t - 2 \ \wedge\ y = t + 2 \qquad (4)$$

$$l:\ x = 2s \ \wedge\ y = -s + 1 \qquad (5)$$



Figur 6.56

p er en parabel med symmetriakse parallell med x-aksen. Regn ut noen x- og y-verdier for t-verdier mellom -4 og 6, og sammenlikn med figuren.

Vi vil finne skjæringspunktene mellom kurvene ved regning. Vi må da løse likningssettet

$$0{,}5t^2 - t - 2 = 2s \ \wedge\ t + 2 = -s + 1 \qquad (6)$$

Av den siste likningen får vi $s = -t - 1$. Vi setter inn i den første likningen og får:

$$0{,}5t^2 - t - 2 = 2 \cdot (-t - 1)$$

$$t^2 + 2t = 0$$

$$t = 0 \ \vee\ t = -2$$

- $t = 0$ gir $s = -0 - 1 = -1$
- $t = -2$ gir $s = -(-2) - 1 = 1$

Likningssettet (6) har to løsninger:

$$(t = -2 \ \wedge\ s = 1) \ \text{og}\ (t = 0 \ \wedge\ s = -1)$$

Vi velger å sette $s = 1$ og $s = -1$ inn i (5):

- $s = 1$: $x = 2 \cdot 1 = 2$ og $y = -1 + 1 = 0$
- $s = -1$: $x = 2 \cdot (-1) = -2$ og $y = -(-1) + 1 = 2$

Skjæringspunktene er: $(-2 , 2)$ og $(2 , 0)$.

6.58d (Sett $t = -2$ og $t = 0$ inn i (4). Hva ser du?)

En sirkel med sentrum i (x_0 , y_0)

På side 242 fant vi en parameterframstilling for en sirkel med sentrum i origo og radius lik 1.
Hvis vi multipliserer cos v og sin v med 5, blir alle x-verdier og y-verdier 5-doblet. Da får vi en parameterframstilling for en sirkel om origo med 5 som radius:

$$x = 5 \cdot \cos v \quad \wedge \quad y = 5 \cdot \sin v$$

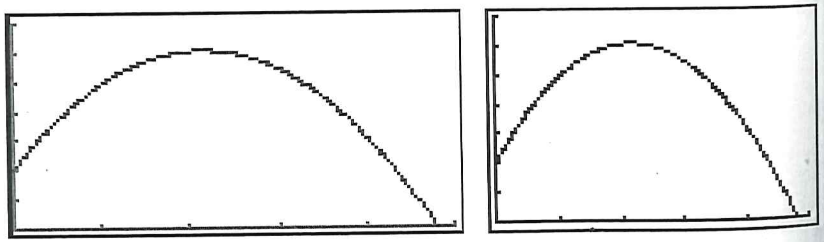
Hvis vi nå parallellforskyver denne sirkelen med vektoren $[6 , 3]$, det vil si 6 hakk mot høyre og 3 opp, øker alle x-verdier med 6, og alle y-verdier med 3.
Parameterframstillingen for en sirkel med sentrum i $(6 , 3)$ og radius lik 5, er altså

$$x = 5 \cdot \cos v + 6 \quad \wedge \quad y = 5 \cdot \sin v + 3$$

Tegn grafen på lommeregneren.

Når parameteren står for tid

Du kaster en stein på skrå opp i lufta. Den banen steinen følger, er en tilnærmet parabel – tilnærmet, fordi luftmotstanden hindrer steinen i å følge en perfekt parabelbane. Dette lille avviket ser vi bort fra.
Den banen steinen følger, kan framstilles med en vanlig parabelfunksjon, men nå vil vi bruke parameterframstilling.
Vi lar α være vinkelen mellom bakken og fartsretningen idet steinen forlater handa. (Vi tenker oss at bakken er helt flat og horisontal.)
Absoluttverdien av fartsvektoren skriver vi v.



Figur 6.57

Vi legger inn et koordinatsystem med x-aksen langs bakken og origo der du står og kaster, og vi går ut fra at steinen forlater handa 2 m over bakken, rett over origo.
Vi antar at $v = 15$ m/s, og at $\alpha = 37°$. En kan da vise at

$$x = 12t \quad \wedge \quad y = 2 + 9t - 5t^2$$

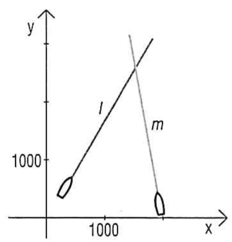
For å finne når steinen treffer bakken, setter vi $y = 0$, og får $t = -0{,}2$ eller $t = 2$.
Kastet tar altså 2 sekunder.
Lengden av kastet blir

$$x = 12 \cdot 2 = 24 \text{ m}$$

NB! For å finne hvor høyt steinen kommer, kan du derivere y med hensyn på t, og finne maksimalverdien for y. Du kan også finne denne høyden grafisk på lommeregneren. Prøv begge deler!

Figuren gir ikke riktig inntrykk av vinkelen α. Hvis lommeregneren skal gi riktig inntrykk av stigningen, må ytterverdienen for x og y velges slik:
Casio: Xmax – Xmin = 2 (Ymax – Ymin)
Texas: Xmax – Xmin = 1,5 (Ymax – Ymin)

Eksempel 2



Figur 6.58

To motorbåter A og B ligger stille 2000 meter fra hverandre.
B ligger rett øst for A.
Plutselig starter A og kjører i en retning som danner 60° med linja rett mot øst. Se figuren. Båten kjører med farten 200 meter/minutt.
Tre minutter seinere starter B og kjører i en retning som danner 100° med østlig retning. B kjører med farten 210 meter/minutt.
Båtenes kjørebaner (l og m på figuren) skjærer hverandre. Men vil båtene komme til skjæringspunktet på samme tidspunkt?
På figuren har vi lagt inn et koordinatsystem der enheten på aksene er 1 meter, og x-aksen peker rett mot øst.
Vi lar (x_1 , y_1) være posisjonen til A og (x_2 , y_2) posisjonen til B t minutter etter at B startet.

Ved $t = 0$, har A kjørt i 3 minutter allerede. Ved dette tidspunktet har B førstekoordinaten 2000.
Etter t minutter er båtenes posisjoner gitt ved

$$\text{A:} \quad x_1 = 200 \cdot \cos 60° \cdot (t + 3) \quad \wedge \quad y_1 = 200 \cdot \sin 60° \cdot (t + 3)$$

$$\text{B:} \quad x_2 = 210 \cdot \cos 100° \cdot t + 2000 \quad \wedge \quad y_2 = 210 \cdot \sin 100° \cdot t$$

Dette gir oss disse parameterframstillingene for l og m:

$$l: \quad x_1 = 100t + 300 \quad \wedge \quad y_1 = 173t + 520$$

$$m: \quad x_2 = -36{,}5t + 2000 \quad \wedge \quad y_2 = 207t$$

Hvis vi bare skulle finne skjæringspunktet mellom grafene, ville det her være naturlig å skifte ut t med s i én av parameterframstillingene, slik vi gjorde på side 244. Men vi er interessert i å vite om båtene kommer til skjæringspunktet på samme tidspunkt.

NB! Derfor må parameterverdien være den samme i begge parameterframstillingene.

Du kan framstille begge kurvene grafisk på lommeregneren, og stille inn lommeregneren på Simul, slik at du kan følge båtenes gang. Hvis du velger små verdier for Pitch (Tstep) (Se side 240), kan du se hvilken båt som eventuelt når fram til skjæringspunktet først.
Men vi kan også regne det ut.

Skal de nå skjæringspunktet samtidig, må vi ha $x_1 = x_2$ og $y_1 = y_2$ for *samme* t-verdi.
Vi setter $x_1 = x_2$. Så undersøker vi om den t-verdien vi finner, passer i likningen $y_1 = y_2$.

$$100t + 300 = -36{,}5t + 2000$$
$$136{,}5t = 1700$$
$$t = \frac{1700}{136{,}5} = 12{,}5$$

Vi setter $t = 12{,}5$ inn i uttrykkene for y_1 og y_2, og får

$$y_1 = 173 \cdot 12{,}5 + 520 = 2683$$
$$y_2 = 207 \cdot 12{,}5 = 2588$$

At $y_1 \neq y_2$ betyr at båtene ikke når skjæringspunktet samtidig.
De kolliderer altså ikke!

Kommentar
Forskjellen på y-verdiene er ca. 100, og y_1 er størst.
Det tar ca. et halvt minutt for B å øke y-verdien med 100 (meter).
Ifølge modellen vil altså A nå skjæringspunktet et halvt minutt før B.

PRØV PÅ LOMMEREGNEREN

Ved å eksperimentere litt med parameterframstilling på lommeregneren kan du få fram både morsomme og vakre figurer.

Det er først og fremst uttrykk med sinus og cosinus som egner seg for eksperimentering, for de er periodiske. Nedenfor gir vi deg noen tips, slik at du kommer i gang.

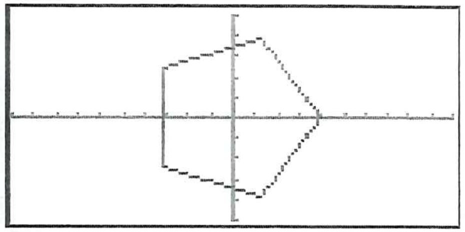
Se kommentar om ytterverdier for x og y side 247.

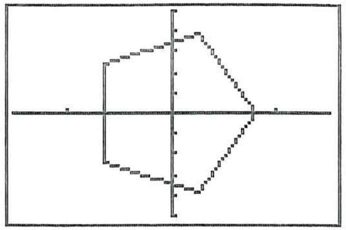
Ta utgangspunkt i parameterframstillingen:

$x = 4\cos t \quad \wedge \quad y = 4\sin t$ (7)
der $t \in [0, 360]$

Du kan for eksempel
- variere pitch-verdiene (Tstep-verdiene)
- variere ytterverdiene for t
- bytte ut faktoren 4 med et uttrykk som inneholder t
- bytte ut t med et uttrykk som inneholder t

Det aller enkleste «forsøket» er å bruke (7) til å lage regulære mangekanter.





Figur 6.59

Velger du pitch-verdien 72 ($\frac{360}{5}$), får du femkanten på figuren.
Hvis du vil ha femkanten symmetrisk om x-aksen med en spiss rett opp, kan du bytte ut t med $t + 18$.
Hvis du vil ha den symmetrisk om x-aksen og beholder en spiss rett ned, kan du bytte ut t med $t - 18$.

Om du øker maksimalverdien for t til 720 med pitch-verdien 72, vil du ikke merke noe på grafen, for den tar bare en ekstra runde i sine egne spor. Skal du se noen virkning, må du velge en pitch-verdi som ikke går opp i 360.
Prøv med pitch-verdien 65, og la maksimal t-verdi være 720, 1080 osv.

Start med (7) på nytt. Bytt ut faktoren 4 med $\frac{t}{360}$.
La maksimal t-verdi være 360 med 30 som pitch-verdi. Hva får du? (Jf. oppgave 6.59)
Prøv med 90 som pitch-verdi. Hva får du nå?

Ved å kombinere en stor sirkelbevegelse med en liten og raskere sirkelbevegelse kan du få fram mange fine mønstre.
Du kan for eksempel addere de to sirkelbevegelsene slik at sentrum for den lille flytter seg langs sirkellinja for den store sirkelen:

$$x = 4\cos t + 2\cos(9t)$$
$$y = 4\sin t + 2\sin(9t) \quad (8)$$

Velg 420 som maksimalverdi for t og 5 som pitch-verdi.

Her kan du variere på flere måter:
Bytte ut 2 eller 9 med andre tall.
Bytte ut de to 2-tallene med ulike tall.
La det siste leddet i de to uttrykkene bytte plass.

Prøv med ulike pitch-verdier i (8).
Forslag: 5, 10, 15, 20, 22,5, 30, 45, 60, 90, 135
(Med 135 som pitch-verdi må du bruke flere omløp.)

OPPGAVER

6.56
Finn skjæringspunktene mellom koordinataksene og de rette linjene i oppgave 6.53.

6.57
Finn ved regning skjæringspunktene mellom koordinataksene og
a kurven på side 239
b parabelen i oppgave 6.50

6.58
Finn skjæringspunktet mellom linja
$x = -2t + 3 \quad \wedge \quad y = t + 1$ og kurven
a $x = t - 1 \quad \wedge \quad y = -3t + 3$
b $x = 0{,}5t - 1 \quad \wedge \quad y = -t + 6$
c $x = -2t + 3 \quad \wedge \quad y = 2t + 2$
d $x = 2t - 3 \quad \wedge \quad y = t^2 + 2t$

6.59
Tegn kurven på lommeregneren.

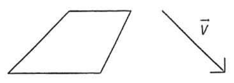
$$x = \frac{t}{360} \cdot \cos t \quad \wedge \quad y = \frac{t}{360} \cdot \sin t$$

Velg 30 som skala-verdi og 2160 som største t-verdi.
Hvor mye øker avstanden fra origo til kurven for hver omdreining?
Kan du forklare denne økningen ut fra parameterframstillingen?

6.60
Hvilken kurve er gitt ved
$x = r\cos t + x_0 \quad \wedge \quad y = r\sin t + y_0$
der $r > 0$.

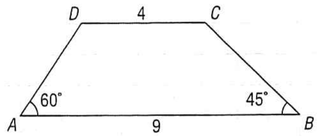
SAMLEOPPGAVER

6.A



Parallellforskyv firkanten til en ny posisjon bestemt av vektoren $\vec{v}$.

6.B



Figuren viser et trapes *ABCD*.

a Forklar hvorfor vi kan skrive $\overline{AB} = k \cdot \overline{DC}$. Bestem *k*.

b Bestem vinkelen

1 $\left(\overline{AD}, \overline{AB}\right)$ **2** $\left(\overline{AB}, \overline{BC}\right)$

3 $\left(\overline{DA}, \overline{AB}\right)$

c Bestem vektorsummen

1 $\overline{AB} + \overline{BC}$ **2** $\overline{AD} + \overline{DB}$

d Bestem vektordifferensen

1 $\overline{AD} - \overline{AB}$ **2** $\overline{AC} - \overline{AB} - \overline{BA}$

6.C

I en elv renner vannet med farten 3 m/s. En båt har, i forhold til vannet, en fart på 4 m/s vinkelrett på vannets bevegelsesretning.

a Tegn figur. Hva blir båtens fart i forhold til elvebredden?

b Hvilken vinkel danner båtens fartsretning i forhold til elvebredden?

6.D

a Regn ut skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$ når

$|\vec{a}| = 8{,}5$, $|\vec{b}| = 2{,}5$ og

1 $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 42{,}5°$ **2** $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 137{,}5°$

b Finn $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ når $|\vec{a}| = 3{,}5$, $|\vec{b}| = 4{,}0$ og

1 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8{,}6$ **2** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -8{,}6$

c En kraft $\vec{F}$ utfører et arbeid på et legeme mens dette beveger seg en strekning $\vec{s}$.
Hvor stort arbeid utfører kraften når
$|\vec{F}| = 1500$ N, $|\vec{s}| = 50$ m og

1 $\left(\vec{F}, \vec{s}\right) = 60°$ **2** $\left(\vec{F}, \vec{s}\right) = 45°$

6.E

a Bestem koordinatene til $\overline{AB}$ og $\overline{AC}$ når $A = (-3, -2)$, $B = (1, -2)$ og $C = (3, 3)$.

b En rett linje går gjennom *A* og *C*. Finn en retningsvektor for *l*.
Hva er stigningstallet for *l*?

6.F

a Regn ut

1 $[2, -1] + [4, 3]$ **2** $[-4, 3] - [7, 5]$

b Løs likningen
$[x - 1, y] + 3[1 + x, 2] = [10, -3]$

c **1** Finn et tall *t* slik at $\vec{a} = [12, t + 3]$ og $\vec{b} = [3, 7]$ blir parallelle.

2 Ta for deg oppgave 6.E. Bestem et tall *s* slik at $\left(\overline{AB} + s \cdot \overline{BC}\right) \parallel [2, -5]$.

6.G

Gitt vektorene $\vec{u} = [6, 2]$ og $\vec{v} = [3, 4]$.

a Finn $|\vec{u}|$ og $|\vec{v}|$.

b Regn ut $\vec{u} \cdot \vec{v}$ og bestem vinkelen ($\vec{u}$, $\vec{v}$).

c Bestem *t* slik at $[-2, t] \perp \vec{u}$.

d Er det mulig å finne en verdi for *s* slik at $[-2s, 3s] \perp \vec{v}$?

6.H

En rett linje *l* går gjennom punktene (7 , 3) og (–5 , –6).

a Finn en parameterframstilling (1) for *l*.

b *l* går gjennom punktet (11 , 6).
Hvilken parameterverdi må du velge for å få dette punktet?

c Bruk (1) til å undersøke om *l* går gjennom punktet (–3 , –5).

d En rett linje *n* har parameterframstillingen
$x = 0{,}5t + 10 \quad \wedge \quad y = -t + 8$
Finn skjæringspunktet mellom *l* og *n*.

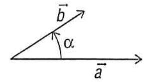
e Finn en parameterframstilling for en linje som står vinkelrett på *n*.

SAMMENDRAG

Vektordefinisjoner

$\vec{u} = \vec{v}$ hvis $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ensrettet og like lange.
$\vec{u}$ og $-\vec{u}$ er motsatte vektorer.
$-\overline{AB} = \overline{BA}$
$|\overline{AB}| = AB$
$\overline{AA} = \vec{0}$
$3\vec{v}$ er ensrettet med $\vec{v}$.
$(-3)\vec{v}$ er motsatt rettet av $\vec{v}$.
$k\vec{v} \parallel \vec{v}$ for alle verdier av tallet *k*.

Vinkelen mellom to vektorer

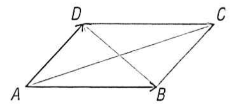


$\alpha = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{b}, \vec{a}\right)$

Regneoperasjoner

$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$
$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$

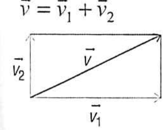
To vektorer ut fra samme punkt



$\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$
$\overline{AD} - \overline{AB} = \overline{BD}$

Dekomponering

$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$



$\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ er komponentene til $\vec{v}$.

To viktige ekvivalenser

$\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \vec{u} = k\vec{v}$
$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Vektorkoordinater

$[x, y] = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y$

Regneregler

$A = (x_1, y_1) \quad B = (x_2, y_2)$
$\overline{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$

$[x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2]$
$[x_1, y_1] - [x_2, y_2] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2]$
$t \cdot [x, y] = [tx, ty]$

Vektoren $\overline{OP}$

$P = (a, b)$
$\Updownarrow$
$\overline{OP} = [a, b]$

Like vektorer

$[x_1, y_1] = [x_2, y_2]$
$\Updownarrow$
$x_1 = x_2$ og $y_1 = y_2$

Parallelle vektorer

$[x_1, y_1] \parallel [x_2, y_2]$
$\Updownarrow$
$x_1 = k \cdot x_2$ og $y_1 = k \cdot y_2$

Skalarprodukt

$[x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

Lengden av en vektor

$|[x, y]| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Avstanden mellom to punkter

$A = (x_1, y_1) \quad B = (x_2, y_2)$
$AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Vinkelen mellom to vektorer

$\alpha = (\vec{u}, \vec{v})$

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

Parameterframstilling for en rett linje

Gitt punkt: $P_1 = (x_1, y_1)$
Retningsvektor: $[a, b]$
$x = at + x_1$
$y = bt + y_1$