5 SANNSYNLIGHETSREGNING OG KOMBINATORIKK

HOVEDMOMENT 6a–c

Etter gammel, indisk religion blir levende vesener klassifisert etter hvilke sanser de har. De som har fem sanser, står høyest, og de med bare én sans står lavest. Hvis levende vesener blir klassifisert etter hvilke sanser de har, hvor mange forskjellige klasser er det? På hvor mange måter kan vi for eksempel velge tre sanser blant de fem? Det er *kombinatorikken* som gir svar på slike spørsmål.

Indiske matematikere var tidlig opptatt av kombinatoriske spørsmål. Rundt 200 f.Kr. gav *Pingala* en regel for å finne hvor mange måter vi kan velge et gitt antall stavelser på fra en mengde av stavelser. Og i en forklaring fra 900-tallet e.Kr. viste *Halayudha* at vi får Pingalas regel fra talltrekanten i nedre venstre hjørne av bildet. Ser du mønsteret i trekanten? Av den femte raden i trekanten finner vi for eksempel at vi fra en mengde av fire stavelser kan velge én stavelse på 4 måter, to stavelser på 6 måter og tre stavelser på 4 måter. Prøv selv om det stemmer!

Inderne kalte talltrekanten *Meru Prastara* etter det mytiske fjellet Meru. Dette fjellet var sentrum for universet og gudenes hjem. Tårnene i tempelruinen Angkor-vat (bildet) i Kambodsja symboliserer fjellet Meru.

I Europa ble matematikerne for alvor interessert i kombinatorikk først for 350 år siden. Interessen kom av ønsket om å regne ut vinnersjansene i ulike spill. En sentral person var den franske filosofen og matematikeren Blaise Pascal (1623–1662). Han studerte også talltrekanten grundig. Den blir derfor ofte kalt *Pascals trekant.*

I dag er kombinatorikken en selvstendig del av matematikken. Den brukes for eksempel i databehandling, kodeteori, numerisk matematikk og sannsynlighetsregning.

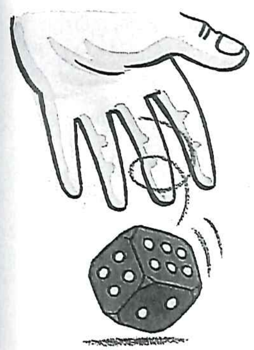
5.1 TILBAKEBLIKK

I grunnkurset lærte du hva sannsynlighet er, og hvordan du kan regne med sannsynligheter. I dette kapitlet går vi videre med sannsynlighetsregningen. Men først tar vi et tilbakeblikk på noe av det du lærte i grunnkurset.

Tilfeldige forsøk og sannsynlighet

Når du kaster en terning, vet du ikke hvor mange øyne du vil få. Terningkast er et *tilfeldig forsøk*. Det er også et tilfeldig forsøk når vi ser om et nyfødt barn er en gutt eller en jente.

Ved terningkast er sannsynligheten $\frac{1}{6}$ for å få sekser. Det betyr at andelen eller den *relative frekvensen* for seksere i mange kast vil være omtrent en seksdel. At sannsynligheten for jentefødsel er 48,6 %, betyr at blant mange nyfødte vil omtrent 48,6 % være jenter. *Sannsynlighet er relativ frekvens i det lange løp.*



Utfall og utfallsrom

I et tilfeldig forsøk er resultatet ikke gitt på forhånd. Men vi vet hvilke resultater vi *kan* få. De mulige resultatene av et forsøk kaller vi *utfall*. Mengden U av alle utfall kalles *utfallsrommet*.

Når du kaster en terning, kan du få 1 , 2 , 3 , 4 , 5 eller 6 øyne. Dette er utfallene ved terningkast. Utfallsrommet er $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Når vi ser om et nyfødt barn er en gutt (G) eller en jente (J), er utfallsrommet $U = \{G, J\}$.

Sannsynlighetsmodell

En sannsynlighetsmodell gir sannsynligheten for hvert enkelt utfall som et tall mellom 0 og 1. Sannsynlighetene for alle utfallene er til sammen 1.

Sannsynlighetsmodellen for et terningkast er

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6} \qquad (1)$$

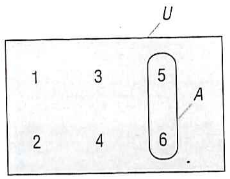
Når vi ser om et nyfødt barn er en gutt eller en jente, har vi sannsynlighetsmodellen

$$P(G) = 0{,}514 \quad \text{og} \quad P(J) = 0{,}486 \qquad (2)$$

5.1 I (1) har alle utfallene samme sannsynlighet. Modellen er *uniform*.
I (2) har utfallene ulik sannsynlighet. Modellen er *ikke* uniform.

Hendelser

Et resultat av et forsøk som svarer til ett eller flere utfall, kaller vi en *hendelse*. Sannsynligheten for en hendelse er summen av sannsynlighetene for de utfallene hendelsen omfatter.



Figur 5.1

Hendelsen «minst fem øyne» ved kast med én terning består av utfallene 5 og 6. Kaller vi denne hendelsen A, kan vi skrive $A = \{5, 6\}$. Vi har

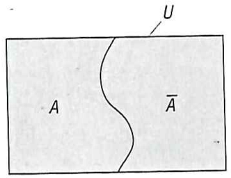
$$P(A) = P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} \qquad (3)$$

Når vi kaster én terning, er det seks *mulige* utfall. De to utfallene 5 og 6 er *gunstige* for hendelsen A = «minst fem øyne». Av (3) ser vi at $P(A)$ er antall gunstige utfall dividert med antall mulige utfall.

5.2 For en *uniform* sannsynlighetsmodell har vi

$$P(A) = \frac{\text{antall gunstige utfall for } A}{\text{antall mulige utfall}} \qquad (4)$$

Komplementære hendelser



Figur 5.2

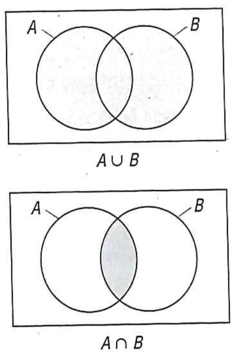
La A være en hendelse ved et forsøk. Hendelsen $\overline{A}$ omfatter alle utfall som *ikke* er med i A. Hendelsene A og $\overline{A}$ er *komplementære*. Den komplementære hendelsen til $A = \{5, 6\}$ ved kast med én terning er $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4\}$.

For komplementære hendelser har vi

5.3

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \qquad (5)$$

Addisjonssetningen



Figur 5.3

La A og B være hendelser ved et forsøk.

- Hendelsen $A \cup B$ omfatter alle utfall som er med i A eller B eller begge. Denne hendelsen inntreffer hvis minst én av hendelsene A eller B inntreffer, altså hvis A inntreffer eller B inntreffer eller begge inntreffer.
- Hendelsen $A \cap B$ omfatter alle utfall som er med i både A og B. Denne hendelsen inntreffer hvis begge hendelsene A og B inntreffer.

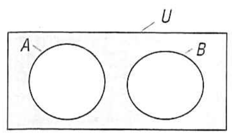
La $A = \{5, 6\}$ være hendelsen «minst fem øyne» ved kast med én terning og la $B = \{1, 3, 5\}$ være hendelsen «antall øyne er et oddetall».
A er vist i venndiagrammet i figur 5.1. Hvordan kan du vise B der?
Vi har at $A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$ og $A \cap B = \{5\}$.

For alle forsøk med hendelser A og B har vi addisjonssetningen

5.4 – 5.6

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (6)$$

Disjunkte hendelser



Figur 5.4

Hvis det ikke er noen utfall som er felles for hendelsene A og B, sier vi at hendelsene er *disjunkte*. Da er $A \cap B$ en *umulig* hendelse, og $P(A \cap B) = 0$. For disjunkte hendelser blir addisjonssetningen

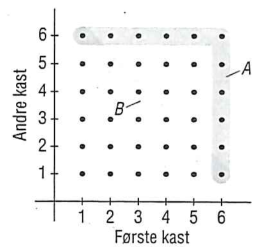
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad (7)$$

5.7 Addisjonssetningen gjelder tilsvarende for tre eller flere disjunkte hendelser.

Vi kan skrive $\varnothing$ (den tomme mengde) for hendelsen som ikke inneholder noen utfall. Når A og B er disjunkte, er $A \cap B = \varnothing$.

Eksempel 1

Vi kaster én terning to ganger. Dette forsøket har 36 utfall, slik figuren viser. Alle disse utfallene er like sannsynlige.
Vi har en uniform sannsynlighetsmodell.



Figur 5.5

Figuren viser hendelsen A = «minst én sekser».
Da er $\overline{A}$ = «ingen sekser». Av (4) har vi $P(A) = \frac{11}{36}$.
Dermed gir (5) at $P(\overline{A}) = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$.

Kontroller at dette stemmer ved å telle opp antall utfall i $\overline{A}$.

Figuren viser også hendelsen B = «sum øyne lik sju». Vi har $P(B) = \frac{6}{36}$.
Hendelsen $A \cap B$ omfatter de to utfallene som er med i både A og B, nemlig (6 , 1) og (1 , 6). Derfor er $P(A \cap B) = \frac{2}{36}$.
Addisjonssetningen (6) gir

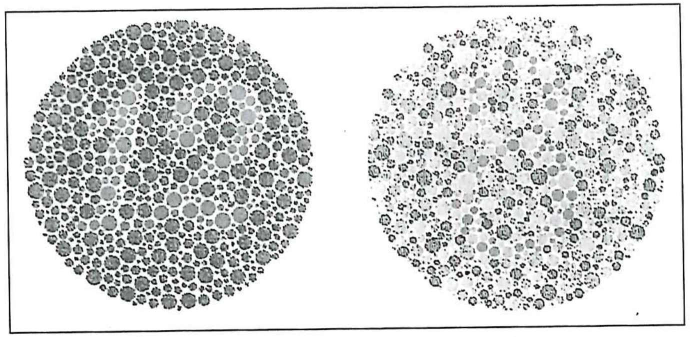
$$P(A \cup B) = \frac{11}{36} + \frac{6}{36} - \frac{2}{36} = \frac{15}{36}$$

Kontroller ved å telle opp antall utfall i $A \cup B$.

Eksempel 2

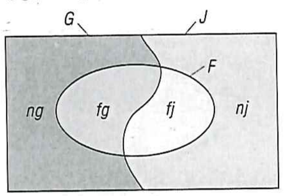
Deler vi inn alle norske barn etter kjønn og fargesyn, blir resultatet omtrent som i tabellen.

	Normalt syn	Fargeblind
Gutt	47,3 %	4,1 %
Jente	48,3 %	0,3 %



Er du fargeblind?

Se på forsøket som består i å undersøke fargesynet til et tilfeldig valgt barn og i å se om barnet er en gutt eller en jente.
Dette forsøket har fire utfall: gutt med normalt syn (ng), fargeblind gutt (fg), fargeblind jente (fj) og jente med normalt syn (nj).



Figur 5.6

Figuren viser et venndiagram for utfallsrommet med hendelsene
$G = \{ng, fg\}$ = «gutt»
$J = \{fj, nj\}$ = «jente»
$F = \{fg, fj\}$ = «fargeblind»

Av tabellen ser vi at sannsynlighetsmodellen for forsøket er

$$P(ng) = 0{,}473\ ,\ P(fg) = 0{,}041\ ,\ P(fj) = 0{,}003 \text{ og } P(nj) = 0{,}483$$

For eksempel får vi at

$$P(F) = P(fg) + P(fj) = 0{,}041 + 0{,}003 = 0{,}044$$

$$P(G) = P(ng) + P(fg) = 0{,}473 + 0{,}041 = 0{,}514$$

$$P(F \cap G) = P(fg) = 0{,}041$$

Det er 4,4 % sannsynlig at et barn er fargeblindt. Sannsynligheten for at det er en gutt, er 51,4 %, mens sannsynligheten er 4,1 % for at det er en fargeblind gutt.

OPPGAVER

5.1

a Du kaster to kronestykker og ser hvilke sider de lander på. Skriv opp utfallsrommet og sannsynlighetsmodellen for dette forsøket.

b Et menneske har én av blodtypene A, B, AB eller 0. I Norge har 48 % blodtype A, 8 % blodtype B, 4 % blodtype AB og 40 % blodtype 0. En lege undersøker blodtypen til en nordmann. Skriv opp utfallsrommet og sannsynlighetsmodellen for dette forsøket.

c Avgjør om sannsynlighetsmodellen er uniform i oppgave a og b.

5.2

a Se på a i oppgave 5.1. Hva er sannsynligheten for at du får nøyaktig én krone? Hva er sannsynligheten for at du får minst én krone?

b Se på b i oppgave 5.1. Hva er sannsynligheten for at blodtypen er AB eller B? Hva er sannsynligheten for at blodtypen ikke er A?

5.3

En kortstokk har 52 kort. Kortene er delt inn i fire «farger»: kløver, ruter, hjerter og spar.
I hver farge er det tretten kort: 2, 3, ... , 10, knekt, dame, konge og ess.
Du trekker tilfeldig ett kort.
Hva er sannsynligheten for at du får

a en kløver
b ikke en kløver
c et ess
d ikke et ess
e et rødt kort (dvs. ruter eller hjerter)
f et svart kort (dvs. kløver eller spar)

5.4

Du kaster en terning. La A = «minst fem øyne» og B = «antall øyne er et oddetall».

a Bestem $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ og $P(A \cup B)$.

b Regn ut $P(A) + P(B)$ og $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Hva ser du?

5.5

Du trekker et kort fra en kortstokk.
Hva er sannsynligheten for at du får

a et honnørkort (dvs. knekt, dame, konge eller ess)
b et svart kort (dvs. kløver eller spar)
c et svart honnørkort
d et svart kort eller et honnørkort (eller begge deler)

5.6

Værmeldingen for helgen sier at det er 20 % sannsynlig at det vil regne lørdag og 30 % sannsynlig at det vil regne søndag.
Er sannsynligheten 50 % for regn i løpet av helgen?

5.7

Du kaster en terning. Avgjør om hendelsene er disjunkte og finn sannsynligheten for unionen av dem:

a «minst 5 øyne», «høyst 3 øyne»
b «høyst 5 øyne», «minst 3 øyne»
c «antall øyne er oddetall», «mer enn 4 øyne»
d «antall øyne er oddetall», «antall øyne er partall»

5.8

Du kaster to terninger.
Hva er sannsynligheten for at du får

a minst én treer
b ingen treer
c sum høyst fem
d sum minst seks
e sum høyst fem eller minst en treer (eller begge deler)

5.9

Se på eksempel 2.
Hva er sannsynligheten for at barnet

a er en jente
b har normalt fargesyn
c er en jente eller har normalt fargesyn (eller begge deler)

5.2 BETINGET SANNSYNLIGHET OG UAVHENGIGE HENDELSER

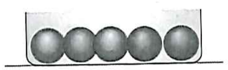
- $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$
- Hvis $P(B \mid A) = P(B)$, er A og B uavhengige hendelser.
- Hvis $P(B \mid A) \neq P(B)$, er A og B avhengige hendelser.

Betinget sannsynlighet

I grunnkurset brukte vi dette eksemplet for å forklare hva vi mener med betinget sannsynlighet:

Eksempel 1

Figur 5.7



Figur 5.7

I en eske ligger det to blå og tre røde kuler. Vi trekker en kule fra esken og ser hvilken farge den har. Uten å legge kula tilbake trekker vi en kule til.

Se på hendelsene A = «første kule er blå» og B = «andre kule er rød». Vi har $P(A) = \frac{2}{5}$. Hvis A har inntruffet, er det tre røde og én blå kule i esken før den andre kula trekkes. Sannsynligheten for B er da $\frac{3}{4}$. Siden sannsynligheten $\frac{3}{4}$ forutsetter at A har inntruffet, sier vi at $\frac{3}{4}$ er den *betingede sannsynligheten* for *B gitt A*. Vi kan også si at dette er sannsynligheten for B når vi *betinger med* hendelsen A.

I grunnkurset skrev vi $P(B$ gitt $A)$ for den betingede sannsynligheten for B gitt A.
Nå vil vi bruke skrivemåten $P(B \mid A)$ for denne betingede sannsynligheten. I eksemplet har vi altså $P(B/A) = \frac{3}{4}$.

I eksempel 1 er det klart hva vi mener med den betingede sannsynligheten for B gitt A. Det skyldes at vi ser på hva som skjer i andre trekning når vi vet resultatet av den første.
Andre ganger er det ikke like klart:

- Hva er den betingede sannsynligheten for at begge kulene er røde gitt at minst én av dem er rød?
- Hva er den betingede sannsynligheten for at den første kula er blå gitt at den andre kula er rød?

For å svare på slike spørsmål trenger vi en definisjon av betinget sannsynlighet. Men før vi gir den, vil vi se på et eksempel til.

Eksempel 2

Hvis et barn er en gutt, hva er da sannsynligheten for at det er fargeblindt? Sagt med andre ord, hva er den betingede sannsynligheten $P(F \mid G)$ for fargeblindhet (F) gitt gutt (G)?

I eksempel 2 i avsnitt 5.1 så vi at $P(G) = 0{,}514$ og $P(F \cap G) = 0{,}041$. Av en gruppe på 100 000 barn vil det altså være ca. 51 400 gutter og ca. 4100 fargeblinde gutter. Den relative frekvensen av fargeblinde *blant guttene* er

$$\frac{4100}{51\,400} = 0{,}080 = 8{,}0\ \%$$

Hvis vi vet at et barn er en gutt, er derfor sannsynligheten 8,0 % for at det er fargeblindt. Altså er $P(F \mid G) = 0{,}08$.

NB!
Legg merke til forskjellen:
- Andelen fargeblinde gutter av 100 000 barn er 0,041.
- Andelen fargeblinde gutter av 51 400 gutter er 0,080.

I eksempel 2 fant vi den betingede sannsynligheten $P(F \mid G)$ ved å dividere antall fargeblinde gutter med antall gutter. Merk at vi kan skrive

$$P(F \mid G) = \frac{4100}{51\,400} = \frac{0{,}041}{0{,}514} = \frac{P(F \cap G)}{P(G)}$$

Sammenhengen mellom $P(F \mid G)$, $P(F \cap G)$ og $P(G)$ begrunner definisjonen:

Betinget sannsynlighet
La A og B være hendelser ved et forsøk.
Den *betingede sannsynligheten for B gitt A* er

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad (1)$$

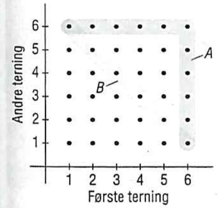
På tilsvarende måte har vi

5.10, 5.11

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (2)$$

Når vi snakker om betinget sannsynlighet, forutsetter vi alltid at sannsynligheten til den hendelsen vi betinger med, er større enn null. Da får vi ikke null i nevneren i (1) eller (2).

Eksempel 3



Figur 5.8

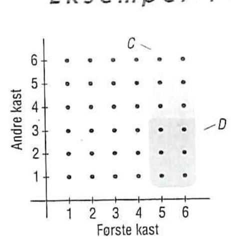
Vi kaster to terninger. Se på hendelsene A = «minst én sekser» og B = «sum øyne lik sju». Vi har $P(A) = \frac{11}{36}$, $P(B) = \frac{6}{36}$ og $P(A \cap B) = \frac{2}{36}$.
Dermed gir (1) og (2)

- $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}} = \dfrac{2}{11}$

- $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Disse resultatene er rimelige. Hvis hendelsen A har inntruffet, er det bare de 11 utfallene i A som er mulige. Og av dem er det to utfall, (6 , 1) og (1 , 6), som er gunstige for B.
Hvor mange av utfallene er mulige hvis B har inntruffet?
5.12 Hvor mange av dem er gunstige for A?

Eksempel 4



Figur 5.9

Vi kaster én terning to ganger. Se på hendelsene C = «minst fem øyne i første kast» og D = «høyst tre øyne i andre kast».

Vi har $P(C) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$, $P(D) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ og $P(C \cap D) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Vi får derfor

$$P(D|C) = \frac{\frac{6}{36}}{\frac{12}{36}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Vi ser at $P(D|C) = P(D)$. Overrasket?

Tolking av betinget sannsynlighet

Tenk deg et forsøk med hendelsene A og B.
Da svarer $P(B)$ til den relative frekvensen av B når vi gjentar forsøket mange ganger.
Tilsvarende svarer $P(B|A)$ til den relative frekvensen av B når vi bare teller med de forsøkene hvor A inntreffer.

Vi kaster to terninger mange ganger.
Hvis vi bare teller de kastene hvor vi får minst én sekser, vil den relative frekvensen for sum sju være omtrent $\frac{2}{11}$.
Dette svarer til den betingede sannsynligheten $P(B|A)$ i eksempel 3.
5.13 Hvordan kan den andre betingede sannsynligheten i eksempel 3 tolkes som en relativ frekvens?

Avhengige og uavhengige hendelser

Sannsynligheten er 4,4 % for at et barn skal være fargeblindt (F), jf. eksempel 2 i avsnitt 5.1. Hvis barnet er en gutt (G), er sannsynligheten for fargeblindhet 8,0 % (eksempel 2).
Det at G inntreffer, endrer sannsynligheten for F.
Vi sier at F og G er *avhengige* hendelser.

I eksempel 4 er sannsynligheten $\frac{1}{2}$ for D = «høyst tre øyne i andre kast» både når vi betinger med C = «minst fem øyne i første kast» og når vi ikke gjør det. Sannsynligheten for D blir ikke endret av at C inntreffer. Vi sier at C og D er *uavhengige* hendelser.

Vi har definisjonen:

Uavhengige og avhengige hendelser
La A og B være hendelser ved et forsøk. Hvis
$P(B|A) = P(B)$, (3)
er A og B *uavhengige* hendelser.
5.14, 5.15 Hvis $P(B|A) \neq P(B)$ er A og B *avhengige* hendelser.

I en oppgave i oppgavesamlingen viser vi at følgende utsagn er ekvivalente:

- $P(B|A) = P(B)$
- $P(A|B) = P(A)$
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Det betyr at hvis ett av dem er sant, så er også de to andre sanne.

I eksempel 4 fant vi ved regning at (3) er oppfylt (med C for A og D for B). Det bekrefter at C og D er uavhengige hendelser.
Vi kan ikke alltid kontrollere at (3) er oppfylt. Ofte må vi forutsette at hendelser er uavhengige. Vi bygger da på vår kunnskap om situasjonen. For eksempel vil vi forutsette at barnas kjønn er uavhengig av hverandre i en trebarnsfamilie som ikke har eneggede tvillinger eller trillinger (eksempel 3 i neste avsnitt).

OPPGAVER

5.10
I klasse 2a er det 25 elever. Av dem har 10 elever fransk og 12 elever tysk. Fire av elevene har både fransk og tysk.
En elev blir trukket ut tilfeldig.
Hva er den betingede sannsynligheten for at eleven

a har fransk gitt at eleven har tysk
b har tysk gitt at eleven har fransk

5.11
Se på eksempel 2 i avsnitt 5.1.
Hva er den betingede sannsynligheten for at barnet

a er fargeblindt gitt at det er en jente
b er en gutt gitt at det er fargeblindt
c er en jente gitt at det har normalt fargesyn

5.12
Se på eksempel 1.

a Forklar hvorfor vi kan trekke de to kulene på $5 \cdot 4 = 20$ mulige måter når vi tar hensyn til rekkefølgen de trekkes i.

b Hvor mange av de 20 måtene er gunstige for hendelsen $A \cap B$? Hvor mange er gunstige for hendelsen A?

c Bruk (4) i avsnitt 5.1 til å bestemme $P(A \cap B)$ og $P(A)$.

d Bruk (1) til å bestemme $P(B|A)$. Hva ser du?

▲ 5.13
Se på eksempel 1.

a Bruk framgangsmåten i oppgave 5.12 til å bestemme sannsynligheten for at begge kulene er røde og sannsynligheten for at begge kulene er blå.

b Hva er sannsynligheten for at minst én kule er rød?

c Hva er den betingede sannsynligheten for at begge kulene er røde gitt at minst én av dem er rød?

d Forklar hvordan vi kan tolke den betingede sannsynligheten i oppgave c som en relativ frekvens.

5.14
I aldersgruppen 16–24 år røyker 30 % daglig. Det gjelder både gutter og jenter.
I den samme aldersgruppen er det 20 % av guttene som aldri trener eller mosjonerer. Blant jentene er denne andelen 10 %. (Tallene er fra 1997.)

a Er kjønn og daglig røyking uavhengige?

b Er kjønn og manglende fysisk aktivitet uavhengige?

▲ 5.15
Du trekker ett kort fra en kortstokk. Undersøk om hendelsene er uavhengige:

a «konge» og «kløver»

b «spar» og «svart» (kløver og spar er svarte farger)

c «hjerter» og «ruter»

d «honnørkort» og «hjerter» (knekt, dame, konge og ess er honnørkort)

5.3 PRODUKTSETNINGEN

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ når A og B er avhengige hendelser
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ når A og B er uavhengige hendelser

Hvis vi multipliserer med $P(A)$ på begge sider av (1) på side 175, får vi *produktsetningen.*

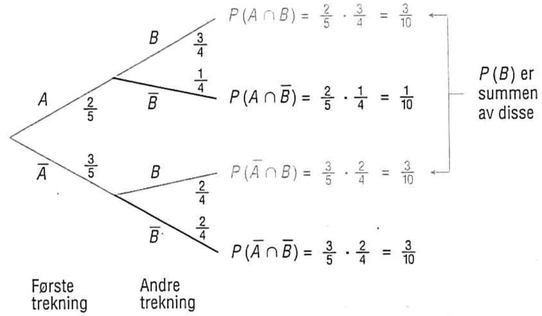
Produktsetningen
La A og B være hendelser ved et forsøk. Da er
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \qquad (1)$$

Tilsvarende gir (2) på side 175 at
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Eksempel 1
Vi ser igjen på eksempel 1 i avsnitt 5.2.
Hva er sannsynligheten for at den første kula vi trekker, er blå og den andre er rød? Hva er sannsynligheten for at begge kulene er røde?

La som før A = «første kule er blå» og B = «andre kule er rød». Da er $\overline{A}$ = «første kule er rød». Produktsetningen gir
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$
$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$
Her er altså sannsynligheten 30 % både for å trekke en blå og en rød kule og for å trekke to røde kuler.

Hva er sannsynligheten for at den andre kula vi trekker, er rød?
Vi kan få en rød kule andre gang på to måter: Hvis vi først trekker en blå kule og så en rød kule *eller* hvis vi trekker to røde kuler. Dette betyr at B er unionen av de to disjunkte hendelsene $A \cap B$ og $\overline{A} \cap B$.
Dermed er
$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$$
Sannsynligheten er $\frac{3}{5}$ for at den andre kula er rød. Det er det samme som sannsynligheten for at den første kula er rød.



Figur 5.10

For å få oversikt og til hjelp i beregningene, kan vi bruke et sannsynlighetstre. Ved å gange sammen sannsynlighetene langs greinene på treet får vi sannsynlighetene for de fire hendelsene gitt til høyre på figuren.

5.16, 5.17 Sannsynlighetene vi har regnet ut ovenfor, er merket med grønt.

Produktsetningen gjelder tilsvarende for flere enn to hendelser. For tre hendelser A, B og C har vi
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B) \qquad (2)$$
(jf. oppgave i oppgavesamlingen).

Eksempel 2

Etter offentlig statistikk er sannsynligheten

- 94 % for at en 65 år gammel kvinne skal bli minst 70 år
- 91 % for at en 70 år gammel kvinne skal bli minst 75 år
- 84 % for at en 75 år gammel kvinne skal bli minst 80 år

Hva er sannsynligheten for at en 65 år gammel kvinne skal bli minst 80 år?

Vi har en 65 år gammel kvinne og ser på hendelsene
A = «kvinnen blir minst 70 år»
B = «kvinnen blir minst 75 år»
C = «kvinnen blir minst 80 år»
Vi har $P(A) = 0{,}94$. Hvis hendelsen A inntreffer, er kvinnen blitt 70 år, så $P(B|A) = 0{,}91$. Hvis både hendelsene A og B inntreffer, har kvinnen blitt 75 år, så $P(C|A \cap B) = 0{,}84$.

Hvis kvinnen blir minst 80 år, må hun også bli 70 år og 75 år. Derfor er $C = A \cap B \cap C$.

Da gir (2):

$$P(C) = P(A \cap B \cap C) = 0{,}94 \cdot 0{,}91 \cdot 0{,}84 = 0{,}72$$

Det er 72 % sannsynlig at en 65 år gammel kvinne skal bli minst 80 år.

Vi har i dette eksemplet vært nøye med å definere hendelsene A, B og C. Det har vi gjort for å kunne forklare i detalj hvordan produktsetningen brukes. Når du skal bruke produktsetningen for to, tre, eller flere hendelser, trenger du ikke gjøre det så formelt
5.18 som i dette eksemplet.

Når A og B er uavhengige hendelser, vet vi at $P(B|A) = P(B)$. Produktsetningen (1) kan da skrives enklere.

Produktsetningen for uavhengige hendelser
La A og B være *uavhengige* hendelser. Da er
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (3)$$

Denne setningen gjelder på samme måte for tre og flere hendelser.

Eksempel 3

En søskenflokk er på tre barn. Hva er sannsynligheten for at det eldste barnet er en gutt og de to andre er jenter?
Vi ser bort fra eneggede tvillinger og trillinger i dette eksemplet.
Vi går derfor ut fra at barnas kjønn er uavhengig av hverandre.
Vi får sannsynligheten for at det eldste barnet er en gutt og de to andre er jenter ved å gange sannsynligheten for at den eldste er en gutt med sannsynligheten for at den nest eldste er en jente og sannsynligheten for at den yngste er en jente. Av (2) i avsnitt 5.1 har vi derfor

$$P(\text{eldste gutt, de to andre jenter}) = 0{,}514 \cdot 0{,}486 \cdot 0{,}486 = 0{,}121$$

På samme måte finner vi at

$$P(\text{midterste gutt, de to andre jenter}) = 0{,}486 \cdot 0{,}514 \cdot 0{,}486 = 0{,}121$$
$$P(\text{yngste gutt, de to andre jenter}) = 0{,}486 \cdot 0{,}486 \cdot 0{,}514 = 0{,}121$$

Vi får sannsynligheten for at det er én gutt i søskenflokken ved å legge sammen de tre sannsynlighetene. Hvorfor? Vi har dermed

$$P(\text{én gutt og to jenter}) = 3 \cdot 0{,}121 = 0{,}363$$

5.19 Det er 36,3 % sannsynlig at søskenflokken består av én gutt og to jenter.

OPPGAVER

5.16
I eksempel 1 fant vi $P(\overline{A}) = \frac{3}{5}$ og $P(B) = \frac{3}{5}$.
Hvordan kan du tolke disse sannsynlighetene som relative frekvenser?

5.17
I en eske er det fem hvite og tre grønne kuler. Du trekker en kule fra esken og ser hvilken farge den har. Uten å legge kula tilbake trekker du en kule til og ser hvilken farge denne har. Hva er sannsynligheten for at
- a begge kulene er grønne
- b første kule er hvit og andre grønn
- c andre kule er grønn

Bruk gjerne et sannsynlighetstre til hjelp.

5.18
Etter offentlig statistikk er sannsynligheten
- 89 % for at en 65 år gammel mann skal bli minst 70 år
- 82 % for at en 70 år gammel mann skal bli minst 75 år
- 72 % for at en 75 år gammel mann skal bli minst 80 år

Hva er sannsynligheten for at en 65 år gammel mann
- a skal bli minst 80 år
- ▲b vil oppleve sin 75-årsdag, men ikke sin 80-årsdag

5.19
Tegn et sannsynlighetstre for situasjonen i eksempel 3.
Forklar hvordan du kan bruke treet til å beregne sannsynlighetene i eksemplet.

5.20
Sannsynligheten for at en gutt er fargeblind, er 8,0 %.
- a Hva er sannsynligheten for at en gutt har normalt fargesyn?
- b Aleksander, Gaute og Mads er venner. Hva er sannsynligheten for at
  - 1 alle har normalt fargesyn
  - 2 én av dem er fargeblind
- c Per, Pål og Espen er brødre. Kan vi finne sannsynligheten for at alle har normalt fargesyn på samme måte som i oppgave b? (Du skal ikke regne her.)

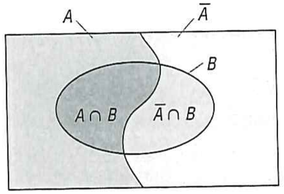
▲ 5.21
Se på eksempel 1.
- a Hva er den betingede sannsynligheten for at den første kula er blå gitt at den andre er rød?
- b Forklar hvordan vi kan tolke den betingede sannsynligheten i oppgave a som en relativ frekvens.

5.4 TOTAL SANNSYNLIGHET OG BAYES' SETNING

- $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$
- $P(B) = P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A})$
- $P(A \mid B) = \dfrac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(B)}$

Total sannsynlighet

I eksempel 1 i forrige avsnitt så vi på trekningen av to kuler fra en eske med to blå og tre røde kuler. Der fant vi sannsynligheten for hendelsen B = «andre kule er rød» ved hjelp av sannsynlighetene for hendelsene A = «første kule er blå» og $\overline{A}$ = «første kule er rød» og de betingede sannsynlighetene for B gitt A og B gitt $\overline{A}$.
Vi skal nå se at resonnementet i eksemplet kan brukes for alle forsøk med hendelser A og B.



Figur 5.11

Venndiagrammet viser at vi kan skrive B som en union av de disjunkte hendelsene $A \cap B$ og $\overline{A} \cap B$.
Addisjonssetningen for disjunkte hendelser gir derfor

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \tag{1}$$

Av produktsetningen får vi

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \tag{2}$$

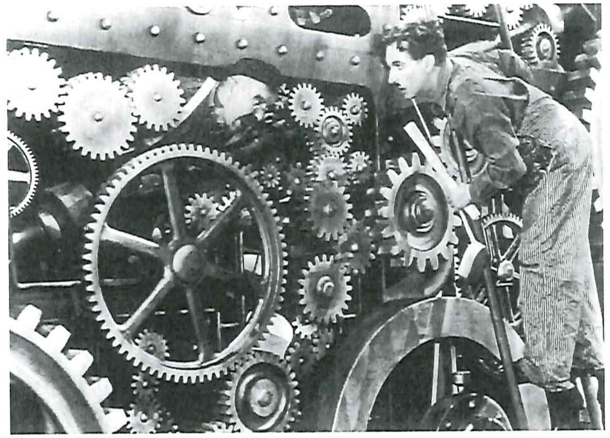
$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A}) \tag{3}$$

Setter vi (2) og (3) inn i (1), får vi setningen om *total sannsynlighet:*

Total sannsynlighet
$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A}) \tag{4}$$

Eksempel 1

En bedrift produserer en vare på to maskiner. De to maskinene tar henholdsvis 40 % og 60 % av produksjonen. På den første maskinen er 4 % av de produserte vareenhetene defekte i det lange løp. På den andre maskinen gjelder dette 2 % av varene. På lageret blir de ferdige produktene blandet, slik at en ikke vet hvilken maskin de kommer fra. En vareenhet blir tatt tilfeldig fra lageret.
Hva er sannsynligheten for at varen er defekt?



Modern Times med Charles Chaplin

Vi ser på hendelsene

A = «vareenheten kommer fra den første maskinen»
$\overline{A}$ = «vareenheten kommer fra den andre maskinen»
B = «vareenheten er defekt»

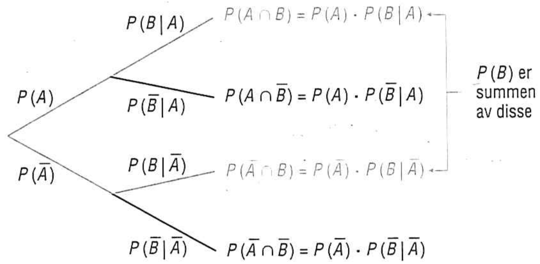
Opplysningene ovenfor gir

$P(A) = 0{,}40 \qquad P(\overline{A}) = 0{,}60$
$P(B|A) = 0{,}04 \qquad P(B|\overline{A}) = 0{,}02$

Ved å bruke setningen om total sannsynlighet får vi

$$P(B) = 0{,}40 \cdot 0{,}04 + 0{,}60 \cdot 0{,}02 = 0{,}028$$

Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt vare er defekt, er 2,8%.
I det lange løp er 2,8 % av den totale produksjonen defekt.



Figur 5.12

Sannsynlighetstreet gir en illustrasjon av setningen om total sannsynlighet. Vi får $P(A \cap B)$ og $P(\overline{A} \cap B)$ ved å gange sammen sannsynlighetene langs de grønne greinene på treet, jf. (2) og (3).
Vi får $P(B)$ ved å legge sammen disse to sannsynlighetene, jf. (4).
Hvordan kan du finne $P(\overline{B})$ av sannsynlighetstreet?

5.22, 5.23, 5.24

Bayes' setning

Vi har et forsøk med to hendelser A og B.
Av definisjonen på betinget sannsynlighet har vi

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Setter vi inn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ i dette uttrykket, får vi *Bayes' setning:*

Bayes' setning
La A og B være hendelser ved et forsøk. Da er

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} \qquad (5)$$

der vi finner $P(B)$ av setningen om total sannsynlighet.

Bayes' setning er nyttig i situasjoner hvor det er lett å bestemme $P(B|A)$ og $P(B|\bar{A})$, og vi ønsker å finne den «omvendte» betingede sannsynligheten $P(A|B)$.

Eksempel 2

Se på eksempel 1. Hvis en vare er defekt, hva er da sannsynligheten for at den kommer fra den første maskinen?
Fra eksemplet har vi $P(B) = 0{,}028$, og dessuten $P(A) = 0{,}40$ og $P(B|A) = 0{,}04$. Av Bayes' setning får vi

$$P(A|B) = \frac{0{,}40 \cdot 0{,}04}{0{,}028} = 0{,}57$$

I det lange løp vil 57 % av de vareenhetene som er defekte, komme fra
5.25 den første maskinen.

Eksempel 3

Mammografi er en form for røntgenundersøkelse som gjør det mulig å avsløre brystkreft på et tidlig stadium. Stortinget har vedtatt at alle kvinner i aldersgruppen 50–69 år skal innkalles til en mammografi-undersøkelse annethvert år.

Erfaringer med mammografi er:

- Hvis en kvinne har brystkreft, er det 95 % sannsynlig at undersøkelsen avslører dette.
- Hvis en kvinne ikke har brystkreft, er det 3,5 % sannsynlig at undersøkelsen likevel viser tegn på kreft.

En kvinne tar en mammografiundersøkelse.

Vi ser på hendelsene

S = «kvinnen har brystkreft (er syk)»

M = «mammogrammet viser tegn på kreft»

Av opplysningene over har vi $P(M|S) = 0{,}95$ og $P(M|\bar{S}) = 0{,}035$.

Vi antar at 0,7 % av de kvinnene som møter til undersøkelse, har brystkreft, slik at $P(S) = 0{,}007$ og $P(\bar{S}) = 0{,}993$.

Mammogrammet viser tegn på brystkreft.
Hva er sannsynligheten for at kvinnen virkelig har kreft?

Vi spør om den betingede sannsynligheten $P(S|M)$.
Denne kan vi finne ved å bruke Bayes' setning.
Først bruker vi setningen om total sannsynlighet:

$$P(M) = P(S) \cdot P(M|S) + P(\bar{S}) \cdot P(M|\bar{S})$$

$$= 0{,}007 \cdot 0{,}95 + 0{,}993 \cdot 0{,}035 = 0{,}041$$

Så bruker vi Bayes' setning:

$$P(S|M) = \frac{P(S) \cdot P(M|S)}{P(M)} = \frac{0{,}007 \cdot 0{,}95}{0{,}041} = 0{,}16$$

Selv om mammogrammet tyder på at kvinnen har brystkreft, er det bare 16 % sannsynlig at hun virkelig har det.

OPPGAVER

5.22
Tegn et sannsynlighetstre for situasjonen i eksempel 1 og bruk det til å regne ut sannsynlighetene i eksemplet.

5.23
I aldersgruppen 16–24 år er det 10 % av jentene og 20 % av guttene som aldri trener eller mosjonerer. Hva er sannsynligheten for at en person i denne aldersgruppen aldri trener eller mosjonerer?
Du kan her regne som om det er like mange gutter som jenter i alderen 16–24 år.

5.24
I en eske er det to mynter. Den ene er normal, mens den andre har krone på begge sider.
Du trekker tilfeldig en mynt og kaster den.
Hva er sannsynligheten for at den viser krone?

5.25
Se på oppgave 5.24. Mynten viser krone.
Hva er sannsynligheten for at du har kastet med den normale mynten?

5.26

En løgndetektor er et instrument som registrerer fysiologiske størrelser (bl.a. blodtrykk, puls og åndedrett) hos en person mens hun eller han svarer på spørsmål. Formålet er å bruke endringer i de fysiologiske størrelsene til å avgjøre om personen lyver eller ikke. I USA blir løgndetektor blant annet brukt i forbindelse med politiavhør av vitner og mistenkte.
I en studie av løgndetektoren fant en at
- hvis en person lyver, er det 88 % sannsynlig at løgndetektoren vil avsløre dette.
- hvis en person snakker sant, er det 14 % sannsynlig at løgndetektoren vil indikere at personen lyver.

a Et vitne i en kriminalsak testes med en løgndetektor. Testen indikerer at vitnet lyver. Hva er sannsynligheten for at vitnet virkelig lyver hvis sannsynligheten for at vitnet snakker sant, er
1 1 % 2 50 % 3 99 %

b I 1988 ble det forbudt å bruke løgndetektor ved ansettelser i private firmaer i USA. Kan du tenke deg en grunn til dette?

5.5 KOMBINATORIKK

For en valgprosess med flere trinn er antall valgmuligheter lik produktet av antall valgmuligheter i hvert trinn.

Når vi skal bruke en uniform sannsynlighetsmodell, må vi kjenne antall mulige og antall gunstige utfall for den hendelsen vi skal finne sannsynligheten for. I enkle situasjoner kan vi skrive opp alle mulige utfall og avgjøre hvilke av dem som er gunstige. Det var det vi gjorde da vi fant at sannsynligheten er $\frac{11}{36}$ for minst én sekser ved to kast med én terning (eksempel 1, avsnitt 5.1).

I Lotto er det 5 379 616 ulike rekker på sju vinnertall (jf. eksempel 4 i avsnitt 5.7). Hvis vi bruker fem sekunder på å skrive opp én rekke med sju tall, vil det ta oss nesten ett år å skrive opp alle mulige vinnerrekker. Og det selv om vi skriver både dag og natt!
For å finne ut hvor mange mulige rekker det er i Lotto, må vi derfor kunne resonnere oss fram til svaret uten å skrive opp alle rekkene. *Kombinatorikk* er navnet på den delen av matematikken som gir oss løsningen på dette og liknende spørsmål.

Her og i de to neste avsnittene vil du lære om noen viktige resultater fra kombinatorikken. De kommer til nytte når du skal beregne sannsynligheter for uniforme sannsynlighetsmodeller.
De er også av interesse i andre sammenhenger.

Multiplikasjonssetningen

Eksempel 1

5.27

Yngve er med familien på Korvetten restaurant for å feire 18-årsdagen sin. På menyen er det 5 forretter, 11 hovedretter og 6 desserter. På hvor mange måter kan Yngve sette sammen bursdagsmiddagen når den skal bestå av én forrett, én hovedrett og én dessert?

Yngve kan velge forretten på 5 måter.
For hver av de 5 mulige valgene av forrett kan han velge hovedretten på 11 måter.
Yngve kan derfor velge forrett og hovedrett på $5 \cdot 11 = 55$ måter.
For hver av de $5 \cdot 11$ mulige valgene av forrett og hovedrett kan han velge desserten på 6 måter.
Yngve kan derfor sette sammen bursdagsmiddagen på

$$5 \cdot 11 \cdot 6 = 330 \qquad (1)$$

måter.

I eksempel 1 kan vi se på valget av de tre rettene som en valgprosess med tre trinn. I første trinn velger Yngve forretten, i andre trinn velger han hovedretten, og i tredje trinn velger han desserten.

Resonnementet som gav oss (1), gjelder generelt.
Det gir *multiplikasjonssetningen*.

Multiplikasjonssetningen for en valgprosess
En valgprosess har r trinn. I det første trinnet er det n_1 valgmuligheter, i det andre trinnet er det n_2 valgmuligheter, ... , i det siste er det n_r valgmuligheter.
Da er det til sammen $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r$ valgmuligheter.

Eksempel 2

Et bilnummer i Norge består av to bokstaver og et femsifret tall. De ni bokstavene G, I, M, O, Q, W, Æ, Ø og Å brukes ikke. Hvor mange forskjellige bilnummer kan vi lage?

Vi kan se på dette som en valgprosess i sju trinn.
De to første trinnene er valgene av bokstavene.
De fem siste trinnene er valgene av sifrene.
Merk at
- hver av bokstavene kan velges på 20 måter.
- det første sifferet kan velges på 9 måter. (Det kan ikke være 0.)
- hvert av de fire siste sifrene kan velges på 10 måter.

Det er derfor mulig å lage

$$20 \cdot 20 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 36\,000\,000$$

5.28, 5.29 forskjellige bilnummer. Det er lenge til alle disse numrene er tatt i bruk!

OPPGAVER

5.27
På en restaurant kan du velge mellom 4 forretter, 6 hovedretter og 3 desserter.
På hvor mange måter kan du sette sammen en middag når den skal bestå av én forrett, én hovedrett og én dessert?

5.28
En kodelås har 6 taster som alle kan plasseres i fire forskjellige stillinger.
Hvor mange forskjellige koder kan det lages til denne låsen?

5.29
I det norske alfabetet er det 29 bokstaver.
Hvor mange «ord» kan du lage som består av
a to forskjellige bokstaver
b tre forskjellige bokstaver
c fire forskjellige bokstaver
(Vi bryr oss ikke om «ordene» gir mening.)

▲ **5.30**
Hvor mange av tallene fra 100 til 999 består av tre forskjellige siffer?

▲ **5.31**
I tipping skal en for hver av 12 fotballkamper gjette om det blir hjemmeseier (H), uavgjort (U) eller borteseier (B). En rekke består av ett tips for hver av de 12 kampene. (Hvis du ikke er fortrolig med fotballtipping, bør du få tak i en tippekupong og lese på den hvordan tippingen foregår.)

a Når du fyller ut tippekupongen, kan du hel- eller halvgardere en kamp ved at du gir mer enn ett tippetegn for denne.
Du leverer en tippekupong med to hel- og tre halvgarderinger.
Hvor mange rekker har du tippet?

b På baksiden av tippekupongen er det gitt en tabell som viser hvor mange rekker du tipper med et visst antall hel- og halvgarderinger. Forklar hvordan Norsk Tipping har kommet fram til denne tabellen.

5.6 ORDNET UTVALG MED OG UTEN TILBAKELEGGING

- Antall ordnede utvalg med tilbakelegging: $n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^r$
- Antall ordnede utvalg uten tilbakelegging: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$
- Antall ordninger av n elementer: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

Det er to viktige spesialtilfeller av multiplikasjonssetningen i forrige avsnitt. Det er ordnet utvalg med og uten tilbakelegging.
Før vi ser på disse spesialtilfellene, vil vi forklare hva «med tilbakelegging» og «uten tilbakelegging» betyr, og hva vi mener med «ordnet utvalg» og «uordnet utvalg».

Per skriver hver av bokstavene i alfabetet på hver sin lapp og legger de 29 lappene i en eske. Han trekker 3 lapper fra esken, én etter én.
Vi sier at Per trekker et *utvalg* på tre bokstaver.

Hvis Per *ikke* legger en lapp tilbake i esken før han trekker den neste, sier vi at han trekker *uten tilbakelegging*.
Hvis Per legger en lapp tilbake i esken før han trekker den neste, sier vi at han trekker *med tilbakelegging*.
Da kan Per trekke den samme bokstaven mer enn én gang. For eksempel kan han få P både første og andre gang han trekker.

Hvis rekkefølgen – eller *ordningen* – bokstavene blir trukket i har betydning, sier vi at Per trekker et *ordnet* utvalg. Da er det forskjell på PER og REP.
Hvis rekkefølgen *ikke* har betydning, sier vi at Per trekker et *uordnet* utvalg. Da er det ikke forskjell på PER og REP, siden begge inneholder de tre bokstavene E, P og R.
5.32

Ordnet utvalg med tilbakelegging

Hvis Per trekker med tilbakelegging, har han 29 bokstaver å velge mellom hver gang han trekker.
Multiplikasjonssetningen i forrige avsnitt gir at han kan velge de tre bokstavene på

$$29 \cdot 29 \cdot 29 = 29^3 = 24\,389$$

forskjellige måter når vi tar hensyn til rekkefølgen.
Dette er antall ordnede utvalg på tre bokstaver når trekningen skjer med tilbakelegging.

Generelt har vi en mengde med n elementer, og vi velger r elementer fra den. Over svarer mengden til alfabetet, og hver bokstav til ett av elementene i mengden.
Resonnementet ovenfor gir:

Ordnet utvalg med tilbakelegging
Fra en mengde med n elementer kan vi lage

$$n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^r \qquad (1)$$

ordnede utvalg på r elementer når utvelgingen skjer med tilbakelegging.

Når vi velger med tilbakelegging, kan vi godt ha r større enn n, slik tilfellet er i eksemplene nedenfor.

Eksempel 1

På en tippekupong er det gitt 12 fotballkamper. For hver kamp skal en tippe om det blir hjemmeseier (H), uavgjort (U) eller borteseier (B). En tipperekke består av ett tips for hver av de 12 kampene. Hvor mange forskjellige rekker kan en tippe?

Vi kan se på en tipperekke som et ordnet utvalg med tilbakelegging. Mengden vi skal velge fra, er de $n = 3$ tippetegnene (H, U, B). Fra den skal vi velge ett tippetegn for hver av de $r = 12$ kampene.

5.33 En kan derfor tippe $3^{12} = 531\,441$ forskjellige rekker.

Eksempel 2

P = 1010000
E = 1000101
R = 1010010
! = 0100001

ASCII (American standard code for information interchange) ble opprinnelig brukt av amerikanske teleksmaskiner. I dag er ASCII en vanlig brukt tegnkode i datasystemer. Standard ASCII-kode bruker sju bits* til å representere en bokstav, et tall eller et tegn. For eksempel representerer 1010000 bokstaven P. (På datamaskiner blir åtte bits gruppert sammen i en byte som representerer et tegn. Sju bits brukes da til å angi ASCII-koden, mens den siste biten brukes til kontroll.)

*bit = *binary digit*; et siffer som bare kan være 0 eller 1

Hvor mange forskjellige tegn inneholder standard ASCII-kode? For hver av de $r = 7$ bitene er det $n = 2$ muligheter (0 eller 1). Standard ASCII-kode inneholder derfor $2^7 = 128$ forskjellige tegn.

5.34 De norske vokalene Æ, Ø og Å er ikke blant de 128 tegnene i standard ASCII-kode. Det er grunnen til at disse bokstavene kan være problematiske når du sender e-post til utlandet eller til noen som bruker et annet e-postsystem enn deg.

Ordnet utvalg uten tilbakelegging

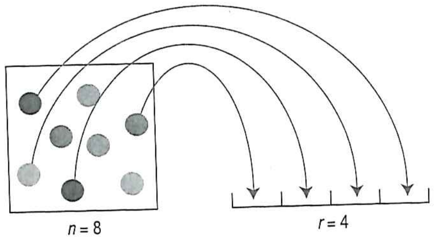
Hvis Per trekker tre bokstaver fra alfabetet uten tilbakelegging, kan han ikke velge den samme bokstaven flere ganger.

- Første gang han trekker, er det 29 bokstaver å velge mellom.
- Andre gang er det 28 bokstaver å velge mellom.
- Tredje gang er det 27 bokstaver å velge mellom.

Det er derfor

$$29 \cdot 28 \cdot 27 = 21\,924 \qquad (2)$$

ordnede utvalg på tre bokstaver når trekningen skjer uten tilbakelegging.



Fra en mengde med 8 elementer kan vi lage $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ ordnede utvalg av 4 elementer når utvelgingen skjer uten tilbakelegging.

Figur 5.13

Generelt har vi en mengde med n elementer, og vi velger r elementer fra denne uten tilbakelegging.

- Første gang vi velger, er det n elementer å velge mellom.
- Andre gang er det $n - 1$ elementer å velge mellom.
- Tredje gang er det $n - 2$ elementer å velge mellom.
- ...
- Gang nr. r er det $n - (r - 1) = n - r + 1$ elementer å velge mellom.

Multiplikasjonssetningen i forrige avsnitt gir:

Ordnet utvalg uten tilbakelegging
Fra en mengde med n elementer kan vi lage
$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \qquad (3)$$
ordnede utvalg på r elementer når utvelgingen skjer uten tilbakelegging.

Når vi lager utvalg uten tilbakelegging, må vi ha $r \le n$. Hvis $r = n$, velger vi alle elementene. Da vil et ordnet utvalg svare til en bestemt rekkefølge av de n elementene. Av (3) har vi:

Ordning av n elementer
n elementer kan ordnes i rekkefølge på
$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! \qquad (4)$$
ulike måter.

Skrivemåten $n!$, som vi leser «n fakultet», betyr produktet av alle naturlige tall fra 1 til og med n.

Eksempel 3

Landslagstreneren i langrenn for kvinner har seks løpere å velge mellom til en World Cup-stafett over 4×5 km. På hvor mange måter kan hun sette opp stafettlaget når vi tar hensyn til hvem som går de ulike etappene?

Hun kan sette opp stafettlaget på

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360 \qquad (5)$$

måter, jf. (3).

Anta at treneren har bestemt seg for hvilke fire løpere som skal gå stafetten, men ikke hvilken etappe hver av dem skal gå.
Hvor mange mulige lagoppstillinger kan hun da velge mellom?
Treneren har nå 4 løpere som skal fordeles på de 4 etappene.
Hun kan velge mellom

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24 \qquad (6)$$

5.35, 5.36 lagoppstillinger, jf. (4).

I kombinatorikken blir en rekkefølge gjerne kalt en *permutasjon*.
Å bytte om rekkefølgen blir kalt å *permutere*.
Formel (4) sier at n elementer kan permuteres på $n!$ måter.
Et ordnet utvalg uten tilbakelegging blir også kalt en permutasjon.
Antall ordnede utvalg – eller permutasjoner – av r elementer valgt blant n elementer kan skrives ${}_nP_r$. Uttrykket (3) ovenfor kan altså skrives ${}_nP_r$. I eksempel 3 har vi ${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$.

Du kan regne ut $n!$ på lommeregneren.
Vi bruker 4! som eksempel:

CASIO 4 [OPTN] [F6] (▷) [F3] (PROB) [F1] (x!) [EXE]

TEXAS 4 [MATH] ▶▶▶ (PRB) [4] (!) [ENTER]

Du kan også regne ut ${}_nP_r$ på lommeregneren.
Vi bruker ${}_6P_4$ som eksempel:

CASIO 6 [OPTN] [F6] (▷) [F3] (PROB) [F2] (nPr) 4 [EXE]

TEXAS 6 [MATH] ▶▶▶ (PRB) [2] (nPr) 4 [ENTER]

OPPGAVER

5.32
I en eske ligger det en blå, en rød og en hvit kule. Du trekker to kuler, først én og så én til.
Skriv opp alle mulige
a ordnede utvalg
  1 med tilbakelegging
  2 uten tilbakelegging
b uordnede utvalg
  1 med tilbakelegging
  2 uten tilbakelegging

5.33
a Du kaster en terning to ganger. Av eksempel 1 i avsnitt 5.1 vet du at dette forsøket har 36 utfall. Forklar hvordan du kan finne dette ved å bruke (1).
b Du kaster en terning tre ganger. Hvor mange utfall har dette forsøket?
c Hvor mange utfall er det hvis du kaster terningen fem ganger?

5.34
Gloria er med i en spørrekonkurranse på TV. Hun blir stilt ti spørsmål. For hvert spørsmål kan hun velge mellom fire svaralternativer der bare ett er riktig. Hvis Gloria svarer riktig på alle spørsmålene, vinner hun 100 000 kr.
a På hvor mange måter kan Gloria svare på de ti spørsmålene?
b Hva er sannsynligheten for at hun vinner 100 000 kr hvis hun bare gjetter?
c Anta at Gloria vet svaret på seks av spørsmålene, men bare gjetter på de fire andre. Hva er da sannsynligheten for at hun vinner 100 000 kr?

5.35
I en matematikkgruppe er det 15 elever.
Hvor mange forskjellige måter kan de sitte på i klasserommet dersom det er 24 pulter å velge mellom?

5.36
Når vinnerne av cupfinalen i fotball mottar pokalen, får de hilse på kongen.
I hvor mange rekkefølger kan 14 spillere passere kongen?

▲ 5.37
Sigurd påstår at han kan smake forskjell på fem typer cola. Johanne tror ikke på dette, og for å teste påstanden gir hun Sigurd de fem colatypene i hvert sitt umerkede glass. Sigurd skal så fortelle hvilken type cola han mener det er i hvert av glassene.
a Hva er sannsynligheten for at Sigurd angir alle colatypene riktig hvis han bare gjetter?
b Anta at Sigurd angir alle colatypene riktig. Syns du Johanne bør skifte mening og begynne å tro på at Sigurd kan smake forskjell på colatypene?

5.7 UORDNET UTVALG UTEN TILBAKELEGGING

$$\binom{n}{r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot r}$$
$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

I forrige avsnitt så vi på *ordnede* utvalg. Nå vil vi se på *uordnede* utvalg, det vil si utvalg hvor vi ikke tar hensyn til rekkefølgen. Også for uordnede utvalg kan utvelgingen skje med eller uten tilbakelegging. Men i dette kurset tar vi bare med uordnede utvalg *uten* tilbakelegging. For uordnede utvalg er vi derfor ikke så nøye med å presisere at vi velger uten tilbakelegging.

Eksempel 1

Se på Per fra forrige avsnitt. La x være antall måter han kan trekke de tre bokstavene på når vi ikke bryr oss om rekkefølgen. Da er x antall uordnede utvalg på tre bokstaver når utvelgingen skjer uten tilbakelegging.
Vi vil finne x.

Av ett *uordnet* utvalg på tre bokstaver kan vi lage $3! = 6$ *ordnede* utvalg. For eksempel kan vi av det uordnede utvalget som består av de tre bokstavene E, P og R, lage de seks ordnede utvalgene

EPR ERP PER PRE REP RPE

Dette betyr at det for tre bokstaver finnes seks ganger så mange ordnede utvalg som uordnede utvalg. Altså er

$$6 \cdot x = 29 \cdot 28 \cdot 27$$

$$x = \frac{29 \cdot 28 \cdot 27}{6} = 3654$$

Vi finner antall uordnede utvalg ved å dividere antall ordnede utvalg med antall måter vi kan ordne ett uordnet utvalg.

Vi har en egen skrivemåte for antall uordnede utvalg uten tilbakelegging.

Antall uordnede utvalg på 3 bokstaver av alfabetets 29 bokstaver skriver vi $\binom{29}{3}$, og det leser vi «tjueni over tre». Eksemplet viser at

$$\binom{29}{3} = \frac{29 \cdot 28 \cdot 27}{3!} = \frac{29 \cdot 28 \cdot 27}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Generelt skriver vi $\binom{n}{r}$ for antall uordnede utvalg på r elementer valgt blant n elementer.

$\binom{n}{r}$ kalles en *binomialkoeffisient*, og den leser vi «n over r».

Noen ganger brukes skrivemåten ${}_nC_r$ i stedet for $\binom{n}{r}$.

I en oppgave i oppgavesamlingen ser vi nærmere på hvorfor binomialkoeffisientene har fått dette navnet, og hvordan vi kan finne dem ved hjelp av Pascals talltrekant, jf. side 168.

Vi kan bestemme $\binom{n}{r}$ ved framgangsmåten i eksempel 1.

Av ett *uordnet* utvalg på r elementer, kan vi lage $r!$ *ordnede* utvalg, jf. (4) i avsnitt 5.6.
Det fins derfor $r!$ ganger så mange ordnede utvalg som uordnede utvalg når utvelgingen skjer uten tilbakelegging.
Antall uordnede utvalg er altså lik antall ordnede utvalg dividert med $r!$ (antall ordninger av ett uordnet utvalg).
Ved å bruke (3) i avsnitt 5.6 får vi derfor

$$\binom{n}{r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{r!} \qquad (1)$$

Merk at (1) kan skrives som en brøk med r faktorer både i teller og nevner:

$$\binom{n}{r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot r}$$

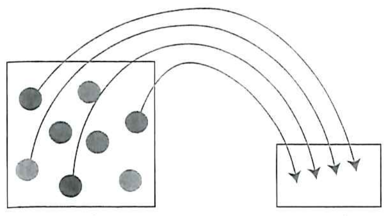
Eksempel 2

I en klasse er det 25 elever. De skal arrangere en klassefest og vil oppnevne en komité med fire medlemmer til å forberede festen. På hvor mange måter kan de velge ut de fire elevene når vi ikke tar hensyn til rekkefølgen?

Her spør vi om antall uordnede utvalg.

Antall uordnede utvalg når vi velger ut 4 elever av 25 elever, er

$$\binom{25}{4} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 12\,650$$



Fra en mengde med 8 elementer kan vi lage $\binom{8}{4} = 70$ uordnede utvalg av 4 elementer når utvelgingen skjer uten tilbakelegging.

Figur 5.14

Hvis vi utvider brøken i eksempel 2 med 21!, får vi $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 25!$ i telleren.
Det viser at vi kan skrive

$$\binom{25}{4} = \frac{25!}{4! \cdot 21!}$$

Hvis vi på samme måte utvider brøken i (1) med $(n-r)!$, får vi
$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \cdot (n-r) \cdot (n-r-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$
i telleren. Derfor har vi at

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

Altså får vi

Uordnet utvalg uten tilbakelegging
Fra en mengde med n elementer kan vi lage

$$\binom{n}{r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} \qquad (2)$$

uordnede utvalg på r elementer når utvelgingen skjer uten tilbakelegging.

5.38, 5.39

Hvis $r = n$, velger vi alle elementene i mengden. Det er bare én måte dette kan gjøres på når vi ikke bryr oss om rekkefølgen.
Derfor må $\binom{n}{n}$ være lik 1.
For at (2) skal gjelde også i denne situasjonen, vedtar vi at $0! = 1$.
(Regn ut 0! på lommeregneren.)

NB! Ovenfor tenkte vi oss at vi velger ett element om gangen. Men når vi er interessert i uordnede utvalg, spiller det ingen rolle om vi velger ett element om gangen, eller om vi velger alle på en gang.

Eksempel 3

Se på eksempel 3 i avsnitt 5.6.
På hvor mange måter kan treneren velge ut de fire løperne (av de seks) som skal gå stafetten, når vi ikke bryr oss om hvem som går de ulike etappene?
Siden vi ikke bryr oss om hvem som går de ulike etappene, skal vi finne antall uordnede utvalg av 4 løpere blant 6 løpere.
Ved å bruke (2) finner vi at dette antallet blir

$$\binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$$

Du kunne også kommet fram til dette ved å ta utgangspunkt i (5) og (6) i eksempel 3 i avsnitt 5.6. Hvordan?

5.40, 5.41

Lommeregneren kan beregne binomialkoeffisienten $\binom{n}{r} = {}_nC_r$.
Vi bruker $n = 34$ og $r = 7$ som eksempel:

CASIO 34 [OPTN] [F6] (▷) [F3] (PROB) [F3] (nCr) 7 [EXE]

TEXAS 34 [MATH] ▶▶▶ (PRB) [3] (nCr) 7 [ENTER]

Eksempel 4

Når du tipper én lottorekke, krysser du av sju tall fra 1 til 34.
Hvor mange forskjellige lottorekker finnes det?
En lottorekke er et uordnet utvalg av 7 tall valgt blant 34 tall.
Det finnes derfor

$$\binom{34}{7} = {}_{34}C_7 = 5\,379\,616$$

forskjellige lottorekker.

Ved lottotrekningen trekkes det tilfeldig sju vinnertall (og tre tilleggstall). Førstepremie går til den eller de som har tippet alle de sju vinnertallene riktig. Hvis du har tippet én lottorekke, er sannsynligheten for at du vinner førstepremie

$$P(\text{førstepremie på én rekke}) = \frac{1}{\binom{34}{7}} = 0{,}000\,000\,186$$

OPPGAVER

5.38
Bruk (2) til å regne uten lommeregneren hvor mange uordnede utvalg vi kan få når vi velger
- **a** to elementer av seks
- **b** tre elementer av seks
- **c** fire elementer av seks
- **d** fem elementer av seks

5.39
Av ti navn skal vi plukke ut fire og sette på en liste.
Hvor mange forskjellige lister kan vi skrive
- **a** dersom vi tar hensyn til rekkefølgen
- **b** dersom vi ser bort fra rekkefølgen
- **c** Divider svaret i oppgave a med 24. Er svaret overraskende?

5.40
Et lokallag i Natur og Ungdom har 30 medlemmer. Lokallaget skal velge tre utsendinger til et møte i fylkeslaget.
Hvor mange måter kan dette gjøres på?

5.41
Tolv personer skal si adjø ved å trykke hverandres hender.
Hvor mange håndtrykk blir det?

5.42
I poker får en spiller utdelt fem av kortstokkens 52 kort.
Hvor mange måter kan dette gjøres på?

▲ **5.43**
I Lotto kan du tippe system ved å krysse av mer enn sju tall på kupongen. (Hvis du ikke er fortrolig med Lotto, bør du få tak i en lottokupong og lese på den hvordan spillet foregår.)
- **a** Hvor mange rekker tipper du hvis du krysser av ni tall?
- **b** Hvor mange rekker tipper du hvis du krysser av ti tall?
- **c** På lottokupongen er det angitt hvor mange lottorekker du tipper hvis du krysser av 8, 9, 10, 11 eller 12 tall. Forklar hvordan Norsk Tipping har kommet fram til disse tallene.

5.8 HYPERGEOMETRISKE SANNSYNLIGHETER

$$P(k \text{ fra } D) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

I dette avsnittet skal vi se nærmere på hvordan vi kan bruke uordnede utvalg til å beregne sannsynligheter.

Eksempel 1

I klasse 2a er det 11 jenter og 14 gutter. De skal arrangere en klassefest og vil oppnevne en komité med fire medlemmer til å forberede festen. Siden alle elevene gjerne vil være med i komiteen, blir de enig om å trekke lodd. Hva er sannsynligheten for at det bare blir gutter i festkomiteen?

De fire elevene til festkomiteen kan velges på $\binom{25}{4}$ måter.

Av disse måtene er $\binom{14}{4}$ gunstige for hendelsen «bare gutter». Dermed er

$$P(\text{bare gutter}) = \frac{\binom{14}{4}}{\binom{25}{4}} = \frac{1001}{12650} = 0{,}079$$

5.44 Det er 7,9 % sannsynlig at det bare blir gutter i festkomiteen.

Eksempel 2

I poker får en spiller utdelt tilfeldig fem av kortstokkens 52 kort.
Hva er sannsynligheten for at en pokerspiller bare får hjerterkort?

De fem kortene kan velges på $\binom{52}{5}$ måter. Av dem er det $\binom{13}{5}$ måter som gir bare hjerter. Dermed er

$$P(\text{bare hjerter}) = \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{1287}{2\,598\,960} = 0{,}0005$$

5.45 Sannsynligheten for å få bare hjerter er 0,05 %.

Generelt ser vi på følgende situasjon:

- Vi har en mengde med n elementer.
  (I eksempel 1 er dette mengden av elever, mens det i eksempel 2 er mengden av kort i kortstokken.)
- Elementene i mengden kan deles inn i to delmengder D og $\overline{D}$.
  Det er m elementer i D og $n - m$ elementer i $\overline{D}$.
  (I eksempel 1 er de to delmengdene «gutter» og «jenter», mens de i eksempel 2 er «hjerterkort» og «øvrige kort».)
- Vi trekker tilfeldig r elementer fra mengden.

Hva er sannsynligheten for at alle elementene vi trekker, er fra D?

Siden vi trekker tilfeldig, er alle de $\binom{n}{r}$ mulige måtene å trekke de r elementene på like sannsynlige.

Av disse mulige måtene er $\binom{m}{r}$ gunstige for hendelsen «bare elementer fra D».

Dermed har vi

$$P(\text{bare elementer fra } D) = \frac{\binom{m}{r}}{\binom{n}{r}} \qquad (1)$$

Når vi skal finne sannsynligheten for å trekke et visst antall elementer fra D og de øvrige fra $\overline{D}$, blir det litt vanskeligere.

Eksempel 3

Vi ser igjen på valget av festkomité i eksempel 1. Hva er sannsynligheten for at det blir to gutter og to jenter i komiteen?
Vi kan fortsatt velge de fire medlemmene på $\binom{25}{4}$ måter.

Hvor mange utvalg er gunstige for hendelsen «to gutter og to jenter»?

Av de 14 guttene i klassen kan vi velge ut to på $\binom{14}{2}$ måter.

Av de 11 jentene kan vi velge ut to på $\binom{11}{2}$ måter.

Hvert enkelt av de $\binom{14}{2}$ utvalgene på to gutter kan kombineres med $\binom{11}{2}$ forskjellige utvalg av to jenter.
Til sammen kan vi derfor velge to gutter og to jenter på $\binom{14}{2}\cdot\binom{11}{2}$ måter.

Dermed er

$$P(\text{to gutter og to jenter}) = \frac{\binom{14}{2}\cdot\binom{11}{2}}{\binom{25}{4}} = \frac{91\cdot 55}{12\,650} = 0{,}396$$

Det er 39,6 % sannsynlig at det blir to gutter og to jenter i festkomiteen.

Eksempel 4

I en kartong er det 18 lyspærer. Fem av dem er defekte.
Vi trekker tilfeldig tre lyspærer. Hva er sannsynligheten for at én av lyspærene er defekt (og dermed to i orden)?

Vi kan velge tre lyspærer på $\binom{18}{3}$ måter.

Av de fem defekte lyspærene kan vi velge én på $\binom{5}{1} = 5$ måter.

Av de 13 lyspærene som er i orden, kan vi velge ut to på $\binom{13}{2}$ måter.

Til sammen kan vi derfor velge én defekt lyspære (og to som er i orden) på $\binom{5}{1}\cdot\binom{13}{2}$ måter.

Dermed er

$$P(\text{én defekt lyspære}) = \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{13}{2}}{\binom{18}{3}} = \frac{5\cdot 78}{816} = 0{,}478$$

Sannsynligheten er 47,8 % for at vi får akkurat én defekt lyspære.

5.46, 5.47

Vi ser så på den generelle situasjonen. Hva er sannsynligheten for at k av de r elementene vi trekker, er fra D?

Av de m elementene i D kan vi velge ut k elementer på $\binom{m}{k}$ måter.

Hvis k elementer er fra D, så er de resterende $r - k$ elementene fra $\overline{D}$.

Av de $n - m$ elementene i $\overline{D}$ kan vi velge ut $r - k$ på $\binom{n-m}{r-k}$ måter.

Det er derfor $\binom{m}{k}\cdot\binom{n-m}{r-k}$ gunstige utvalg for hendelsen «k elementer fra D».

Sannsynligheten for at nøyaktig k av elementene er fra D er dermed

$$\frac{\binom{m}{k}\cdot\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Vi oppsummerer:

Hypergeometriske sannsynligheter

En mengde med n elementer kan deles inn i to delmengder D og $\overline{D}$. Det er m elementer i D og $n - m$ elementer i $\overline{D}$. Vi trekker tilfeldig r elementer fra mengden uten tilbakelegging. Da er

$$P(k \text{ elementer fra } D) = \frac{\binom{m}{k}\cdot\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}} \qquad (2)$$

De sannsynlighetene vi får ved å bruke (2), kalles *hypergeometriske* sannsynligheter.
Hvis vi setter $k = r$ i (2), får vi (1). Den sannsynligheten vi får av (1), er altså et spesialtilfelle av (2).

OPPGAVER

5.44
Se på eksempel 1. Hva er sannsynligheten for at det bare blir jenter i festkomiteen?

5.45
I en eske er det 10 blå og 15 røde kuler.
Vi trekker tilfeldig fem kuler.

- **a** På hvor mange måter kan vi trekke de fem kulene når vi ikke bryr oss om rekkefølgen de velges i?
- **b** På hvor mange måter kan vi trekke fem blå kuler?
- **c** Hva er sannsynligheten for at vi får fem blå kuler?

5.46
Se på eksempel 4. Hva er sannsynligheten for at vi får

- **a** ingen defekte lyspærer
- **b** to defekte lyspærer
- **c** minst én defekt lyspære

5.47
Se på oppgave 5.45.

- **a** På hvor mange måter kan vi trekke tre blå kuler og to røde kuler når vi ikke bryr oss om rekkefølgen de velges i?
- **b** Hva er sannsynligheten for at vi får tre blå og to røde kuler?

▲ 5.48
En pokerspiller får utdelt fem kort.
Hva er sannsynligheten for at alle de fem kortene hun får har samme farge? (Husk at kløver, ruter, hjerter og spar regnes som hver sin farge.)

5.9 BINOMISKE SANNSYNLIGHETER

$P(k\ S\text{-er}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

I eksempel 3 i avsnitt 5.3 fant vi sannsynligheten for at det er én gutt i en familie med tre barn. Vi måtte da ta hensyn til at gutten kunne være det eldste, det nest eldste eller det yngste barnet.
I dette avsnittet skal vi se nærmere på problemstillinger av denne typen. Vi ser først på en firebarnsfamilie.

Eksempel 1

En søskenflokk består av fire barn der ingen er eneggede tvillinger, trillinger eller firlinger. Hva er sannsynligheten for at det er to gutter og to jenter i søskenflokken?

At de to eldste barna er gutter og de to yngste er jenter, skriver vi $GGJJ$. Tilsvarende skriver vi $GJJG$ hvis den eldste og den yngste er gutt og de to midterste er jenter. Andre rekkefølger som gir to gutter og to jenter, er $GJGJ$, $JGGJ$, $JGJG$ og $JJGG$.
Vi antar at barnas kjønn er uavhengig av hverandre.

Av produktsetningen for uavhengige hendelser har vi da

$$P(GGJJ) = 0{,}514 \cdot 0{,}514 \cdot 0{,}486 \cdot 0{,}486 = 0{,}514^2 \cdot 0{,}486^2$$
$$P(GJJG) = 0{,}514 \cdot 0{,}486 \cdot 0{,}486 \cdot 0{,}514 = 0{,}514^2 \cdot 0{,}486^2$$

Kontroller at også de fire andre rekkefølgene har sannsynligheten $0{,}514^2 \cdot 0{,}486^2$.

Vi finner sannsynligheten for at det er to gutter og to jenter i søskenflokken ved å legge sammen sannsynligheten for de seks rekkefølgene. Dermed har vi

$$P(\text{to gutter og to jenter}) = 6 \cdot 0{,}514^2 \cdot 0{,}486^2 = 0{,}374$$

Sannsynligheten er 37,4 % for at det er to barn av hvert kjønn i søsken-
5.49 flokken.

Ved å skrive opp alle mulige rekkefølger av to gutter og to jenter fant vi i eksempel 1 at det er seks rekkefølger som gir to gutter og to jenter. Dette kan vi finne på en enklere måte.
Å velge en bestemt rekkefølge av to G-er og to J-er er det samme som å velge ut to plasser der det skal stå G. Og det kan gjøres på $\binom{4}{2} = 6$ måter.
5.50 Det er derfor 6 rekkefølger av barna som gir to gutter og to jenter.

Eksempel 2

Klasse 2b har en flervalgsprøve med 10 spørsmål.
For hvert spørsmål krysser elevene av ved ett av tre svaralternativer. Eldrid har ikke lest på leksene og krysser av helt tilfeldig for hvert spørsmål. Hva er sannsynligheten for at hun får fire riktige svar?

Hendelsen at Eldrid får riktig svar på de fire første spørsmålene og galt på de seks siste, skriver vi $RRRRGGGGGG$.
Forklar at

$$P(RRRRGGGGGG) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \qquad (1)$$

Hendelsen $RRRRGGGGGG$ er bare én av flere som gir Eldrid fire riktige svar. En annen er for eksempel $GRGRGRGRGG$.

Hvor mange slike hendelser er det som gir Eldrid fire riktige svar?
Vi får en bestemt rekkefølge av fire R-er og seks G-er ved å velge de fire spørsmålene der det skal stå R.

Av ti spørsmål kan vi velge ut fire på $\binom{10}{4} = 210$ måter.

Det er 210 rekkefølger av fire R-er og seks G-er.

Alle disse rekkefølgene har samme sannsynlighet som (1).
Dermed har vi

$$P(\text{Eldrid får 4 riktige svar}) = 210 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 = 0{,}228$$

5.51 Det er 22,8 % sannsynlig at Eldrid får fire riktige svar.

Generelt har vi følgende situasjon:

- Vi gjør n forsøk.
  (I eksempel 1 er det ett forsøk å se hvilket kjønn et barn har.
  I eksempel 2 er hvert spørsmål ett forsøk.)
- I hvert forsøk er det to muligheter: Enten inntreffer en bestemt hendelse S, eller så inntreffer den ikke.
  (I eksempel 1 ser vi om barnet er en gutt.
  I eksempel 2 ser vi om svaret er riktig.)
- I hvert forsøk er sannsynligheten p for at S skal inntreffe.
  (I eksempel 1 er sannsynligheten for gutt 0,514.
  I eksempel 2 er sannsynligheten for riktig svar $\frac{1}{3}$.)
- Forsøkene er uavhengige.
  (I eksempel 1 har vi antatt at barnas kjønn er uavhengig av hverandre. I eksempel 2 har vi uavhengighet siden Eldrid krysser av helt tilfeldig for hvert spørsmål.)

Vi er interessert i sannsynligheten for at hendelsen S inntreffer nøyaktig k ganger i de n forsøkene. Vi kan finne denne sannsynligheten ved å bruke resonnementet i eksemplene:

Sannsynligheten for at S inntreffer i k bestemte forsøk, for eksempel i de k første, er $p^k(1-p)^{n-k}$
Av de n forsøkene kan vi velge ut k forsøk på $\binom{n}{k}$ måter.

Sannsynligheten for at S inntreffer nøyaktig k ganger, er derfor
$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Vi oppsummerer:

Binomiske sannsynligheter
Vi gjør n uavhengige forsøk. I hvert forsøk er sannsynligheten p for at en hendelse S skal inntreffe og $1-p$ for at den ikke skal inntreffe. Da er

$$P(S \text{ inntreffer } k \text{ ganger}) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad (1)$$

5.52 Sannsynligheten (1) kalles en *binomisk sannsynlighet*.

Eksempel 3

En bestemt type frø spirer med 80 % sannsynlighet.
Du sår 50 frø. Hva er sannsynligheten for at nøyaktig 40 av frøene vil spire?
Hvis frøene spirer uavhengig av hverandre, kan vi bruke (1) til å finne sannsynligheten. Vi har dermed

$$P(40 \text{ frø vil spire}) = \binom{50}{40} \cdot 0{,}80^{40} \cdot 0{,}20^{10} = 0{,}14$$

5.53 Det er 14 % sannsynlig at nøyaktig 40 frø vil spire.

I eksempel 3 kan vi være interessert i sannsynligheten for at *minst* 40 frø vil spire. Da må vi legge sammen sannsynlighetene for at k frø vil spire for $k = 40, 41, \ldots, 50$.
I oppgavesamlingen viser vi hvordan du kan bruke lommeregneren til å beregne denne og andre binomiske sannsynligheter.

OPPGAVER

5.49
Vi kaster en terning fem ganger. At vi får sekser (S) i de to første kastene og fem eller mindre (F) i de tre siste, skriver vi *SSFFF*. Tilsvarende skriver vi *SFFFS* hvis vi får sekser i første og siste kast og fem eller mindre i de øvrige kastene.

a De to rekkefølgene ovenfor gir begge to seksere. Hvilke andre rekkefølger gjør det?
b Hva er sannsynligheten for rekkefølgen *SSFFF*? Hva er sannsynligheten for hver av de andre rekkefølgene som gir to seksere?
c Hva er sannsynligheten for at vi får to seksere?

5.50
I en eske har vi fem lapper. På lappene har vi skrevet tallene fra 1 til 5.
På hvor mange måter kan vi trekke et uordnet utvalg på to lapper uten tilbakelegging?
Hva er sammenhengen mellom dette spørsmålet og spørsmålet i oppgave 5.49a?

5.51
Se på eksempel 2.
Vi skal finne sannsynligheten for at Eldrid får fem riktige svar ved å bruke framgangsmåten i eksemplet.

a Hva er sannsynligheten for at Eldrid får galt svar på de fem første spørsmålene og riktig på de fem siste? Hva er sannsynligheten for at Eldrid får galt svar på alle spørsmål med odde nummer og riktig på alle hvor nummeret er et partall?
b På hvor mange måter kan vi velge ut fem spørsmål av de ti?
c Hva er sannsynligheten for at Eldrid får riktig svar på fem spørsmål?

5.52
Bruk formel (1) til å bestemme sannsynlighetene i oppgave 5.49c og oppgave 5.51c.

5.53
Du kaster 10 mynter. Hva er sannsynligheten for at du får nøyaktig

a fire krone
b fem krone
c seks krone

5.54
Fra offentlig statistikk vet vi at 1 % av fødslene i Norge er tvillingfødsler. Anta at et sykehus har 200 fødsler i løpet av ett år.
Hva er sannsynligheten for at det

a ikke blir født noen tvillingpar
b blir født ett tvillingpar
c blir født to tvillingpar
d blir født tre eller flere tvillingpar

SAMLEOPPGAVER

5.A
Etter offentlig statistikk er sannsynligheten
- 97,8 % for at en 44 år gammel kvinne skal bli minst 54 år
- 94,7 % for at en 54 år gammel kvinne skal bli minst 64 år
- 94,9 % for at en 64 år gammel kvinne skal bli minst 69 år

a Hva er sannsynligheten for at en 44 år gammel kvinne skal bli minst 69 år?

Ti gamle klassevenninner som alle er 44 år, møtes på Heartbreak hotel for å feire at det er 25 år siden de gikk ut av videregående skole. De blir enig om å møtes igjen samme sted om 25 år. Hva er sannsynligheten for at
b alle ti er i live om 25 år
c ni er i live om 25 år
d åtte er i live om 25 år
e minst åtte er i live om 25 år

5.B
Ved å teste for et bestemt hormon i en urinprøve kan en avgjøre om en kvinne er gravid. En graviditetstest er ikke 100 % sikker. I en undersøkelse fant en:
- Hvis en kvinne er gravid, er det 99,5 % sannsynlig at testen vil vise det.
- Hvis en kvinne ikke er gravid, er det 0,5 % sannsynlig at testen likevel vil indikere at kvinnen er gravid.

Vi antar at 20 % av de kvinnene som tar en graviditetstest, er gravide.

En kvinne tar en graviditetstest.
a Hva er sannsynligheten for at testen indikerer at kvinnen er gravid?
b Testen indikerer at kvinnen er gravid. Hva er sannsynligheten for at hun virkelig er det?

5.C
«Idioten» er en kabal. Den starter med at du legger fire kort fra en kortstokk opp på bordet.
a Hvor mange måter kan du gjøre dette på når vi tar hensyn til rekkefølgen?
b På hvor mange måter kan du få
1 fire spar
2 ett kort i hver farge
(Husk at det er fire «farger»: kløver, ruter, hjerter og spar.)
c Finn sannsynligheten for de to hendelsene i oppgave b. Må du gjøre noen forutsetninger for å beregne dem?

5.D
Fem venner går sammen på kino.
a Hva er sannsynligheten for at ingen av dem har fødselsdag i samme måned? (Du kan regne som om alle fødselsmåneder er like sannsynlige.)
b Hva er sannsynligheten for at minst to av dem har fødselsdag i samme måned?
c Du er en av de fem vennene. Hva er sannsynligheten for at minst én av de andre er født i samme måned som deg?

5.E
Ved en skole er det 17 grupper som skal ha undervisning en bestemt skoletime. Skolen har 20 undervisningsrom.
a På hvor mange måter kan inspektøren velge de 17 rommene der det skal være undervisning?
b Inspektøren har valgt rommene der det skal være undervisning. På hvor mange måter kan hun fordele gruppene på disse rommene?

5.F
Du tipper én lottorekke (jf. eksempel 4 i avsnitt 5.7). Hva er sannsynligheten for at du tipper riktig
a seks vinnertall
b fem vinnertall
c fire vinnertall

SAMMENDRAG

Uniform sannsynlighetsmodell
$$P(A) = \frac{\text{antall gunstige utfall for } A}{\text{antall mulige utfall}}$$

Komplementære hendelser
$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Addisjonssetningen
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
  når A og B er disjunkte hendelser

Betinget sannsynlighet
$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Uavhengige og avhengige hendelser
- Hvis $P(B \mid A) = P(B)$, er A og B uavhengige hendelser.
- Hvis $P(B \mid A) \neq P(B)$, er A og B avhengige hendelser.

Produktsetningen
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$
  når A og B er avhengige hendelser
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
  når A og B er uavhengige hendelser

Total sannsynlighet
- $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$
- $P(B) = P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A})$

Bayes' setning
$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(B)}$$
der vi finner $P(B)$ ved total sannsynlighet.

Valgprosess i r trinn
Hvis det er
- n_1 valgmuligheter i første trinn,
- n_2 valgmuligheter i andre trinn,

...
- n_r valgmuligheter i siste trinn,

er det til sammen
$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r$ valgmuligheter.

Ordnede utvalg
En mengde har n elementer.
Antall ordnede utvalg på r elementer er
- med tilbakelegging:
  $n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^r$
- uten tilbakelegging:
  $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$
  På lommeregneren: ${}_nP_r$

Ordning av n elementer
n elementer kan ordnes i rekkefølge på
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ måter.

Uordnet utvalg uten tilbakelegging
Fra en mengde med n elementer kan vi lage
$$\binom{n}{r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$
uordnede utvalg på r elementer når utvelgingen skjer uten tilbakelegging.
På lommeregneren: ${}_nC_r$

Hypergeometriske sannsynligheter
En mengde med n elementer kan deles inn i delmengdene D og $\overline{D}$. Det er m elementer i D og $n-m$ elementer i $\overline{D}$.
Vi trekker tilfeldig r elementer fra mengden uten tilbakelegging.
$$P(k \text{ elementer fra } D) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Binomiske sannsynligheter
Vi gjør n uavhengige forsøk.
I hvert forsøk er sannsynligheten p for at en hendelse S skal inntreffe og $1-p$ for at den ikke skal inntreffe.
$$P(S \text{ inntreffer } k \text{ ganger}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$