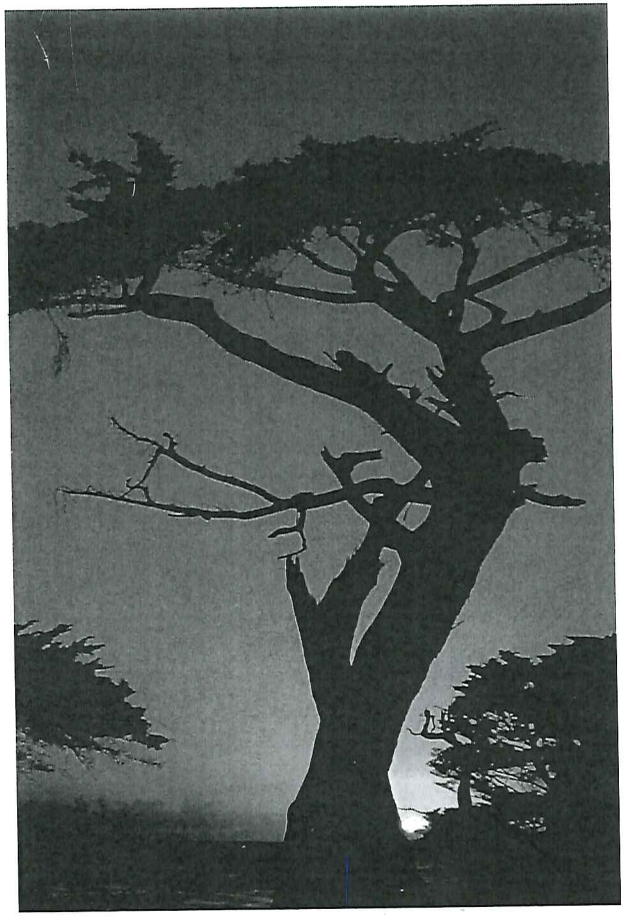
4 DERIVASJON

HOVEDMOMENT
5a–e, h



Men treliknelsen slår feil. Rett nok vokser den matematiske kunnskapen og skyter nye knopper, men den er kanskje mer som en by med hus bygd opp av et stort antall byggesteiner – matematiske *setninger*. Pytagoras' læresetning er en slik byggestein. Nye setninger som bygger på gamle, oppdages stadig, og disse kan igjen brukes til å bygge ny kunnskap.

Hvor «mye» matematikk fins, og hvor mye gjenstår å oppdage? Er leken over? Man regner med at all kjent matematikk ville fylle omtrent 100 000 bøker, og kunnskapen vokser med omtrent 200 000 nye setninger per år – mer enn noe menneske kan følge med på.

Vi kan se på matematikken som en ekspanderende sirkel hvor arealet inne i sirkelen er den kjente matematikken, og periferien er der forskningen befinner seg akkurat nå. Det uoppdagede matematiske universet er det som ligger utenfor sirkelen – uten ende.

Matematikk er som et tre, med røtter i blant annet Babylon, India og Egypt. Selv om «treet» er gammelt, er det fullt av liv. Matematisk forskning er mer intensiv enn noen gang.

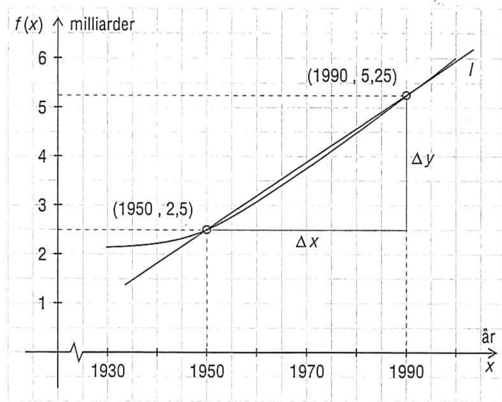
Det fine er at det er bruk for denne matematikken. Ett av de mest brukte verktøyene i anvendt matematikk er derivasjonsregning.

4.1 TILBAKEBLIKK

På grunnkurset lærte du hvordan du kan finne gjennomsnittlig vekstfart for en funksjon i et intervall og momentan vekstfart i et punkt.
Når vi har en funksjonssammenheng mellom to størrelser, vil vekstfarten fortelle hvor raskt den ene størrelsen endrer seg i forhold til den andre. Det er hovedgrunnen til at vekstfart blir brukt innenfor fagområder som samfunnsfag, økonomi, naturfag osv.
Vekstfart blir brukt til å tallfeste og undersøke *endringer* på en systematisk måte.

Gjennomsnittlig vekstfart

Figuren viser jordas folketall fra 1930 til 1998 gitt i milliarder. La $f(x)$ være folketallet i år x.



Figur 4.1

Stigningstallet til linja l på figuren er det samme som gjennomsnittlig vekstfart for $f(x)$ i intervallet [1950 , 1990].

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5,25 - 2,5}{1990 - 1950} = \frac{2,75}{40} = 0,069$$

Vi minner om at den greske bokstaven Δ (delta) brukes for tillegg eller økning.
Δx er økning av x. Δy er økning av y.

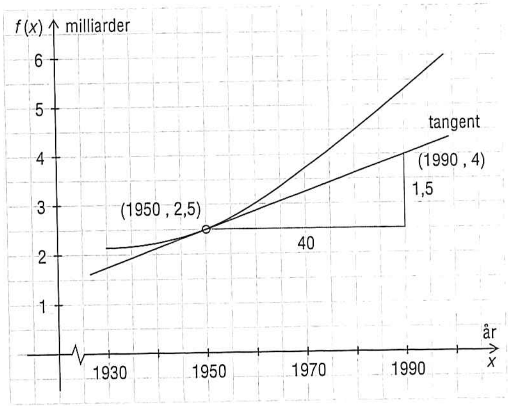
Fordi y er målt i milliarder og x er målt i år, blir enheten for vekstfart milliarder/år. I gjennomsnitt økte befolkningen med 0,069 milliarder per år fra 1950 til 1990.

4.1, 4.2 Trekk en linje gjennom punktene (1950 , 2,5) og (1970 , 3,75). Hvor mye økte folketallet i gjennomsnitt per år fra 1950 til 1970?

Momentan vekstfart

På grunnkurset fant vi den momentane vekstfarten på tre måter:
- regne ut tangentens stigningstall ut fra en graf
- regne ut gjennomsnittlig vekstfart i et lite intervall ut fra en tabell
- lommeregnermagi

Vi vil bruke den første måten til å finne den momentane vekstfarten i verdens folketall i 1950.



Figur 4.2

På figuren har vi tegnet tangenten i punktet (1950 , 2,5).
Stigningstallet for denne tangenten er

$$a = \frac{4-2,5}{1990-1950} = \frac{1,5}{40} = 0,038$$

Den momentane vekstfarten var 0,038 milliarder/år i 1950.
På dette tidspunkt økte altså folketallet med 38 millioner per år.

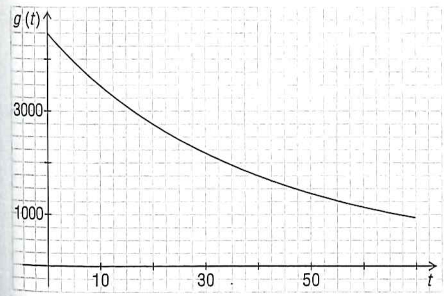
I dette kapitlet skal vi ta for oss en ny metode å finne momentan vekstfart på. Denne metoden kaller vi *derivasjon*. Når vi bruker metoden på en funksjon, sier vi at vi *deriverer* funksjonen.
Når vi deriverer, får vi en eksakt verdi for den momentane vekstfarten. Men det viktigste er at vi finner et generelt uttrykk for vekstfarten. Dette uttrykket kan vi bruke til å finne den momentane vekstfarten for de x-verdier vi ønsker.
Det siste punktet er ikke bare arbeidssparende. Det gjør at den momentane vekstfarten kan brukes på mange ulike måter. Blant annet vil du i kapittel 7 se at kjennskap til derivasjon gjør deg i stand til å finne det eksakte arealet under en graf på en enkel måte.

Før vi forklarer hvordan du deriverer, tar vi for oss begrepet *grenseverdi*. Grenseverdi er viktig for å kunne forstå den nye metoden.

OPPGAVER

4.1
Bruk figur 4.1 til å finne gjennomsnittlig vekstfart for $f(x)$ i intervallene
1 [1980 , 1998] **2** [1980 , 1990]
Hva forteller svarene?

4.2
Figuren viser hvordan aktiviteten $g(t)$ til et radioaktivt stoff endrer seg med tiden t, målt i timer. Finn gjennomsnittlig vekstfart for $g(t)$ i intervallene
1 [20 , 70] **2** [20 , 60]
3 [20 , 40]
Hva forteller svarene?



4.3
Bruk figur 4.1 til å finne momentan vekstfart for $f(x)$ i 1980.
Hva forteller svaret?

4.4
Finn momentan vekstfart for $g(t)$ i oppgave 4.2 når $t = 20$. Hva forteller svaret?

4.2 GRENSEVERDI OG KONTINUITET

Vi tar for oss funksjonen f gitt ved $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$.

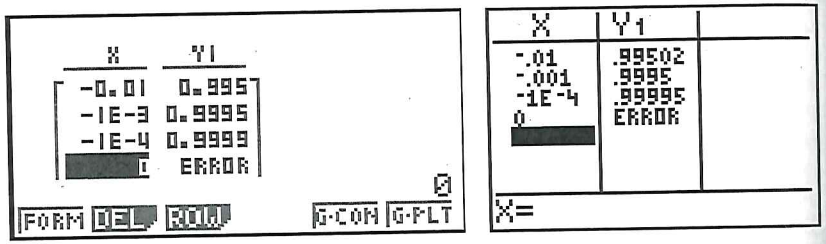
Uttrykk med 0 i nevner har ingen mening. Funksjonen er derfor ikke definert for $x=0$. For alle andre verdier av x kan vi regne ut funksjonsverdier, for eksempel

$$f(-1)=\frac{e^{-1}-1}{-1}=1-e^{-1}=0,63 \qquad f(1)=\frac{e^{1}-1}{1}=1,72$$

$f(0)$ er altså ikke definert, men hva skjer med funksjonsverdien $f(x)$ når x *nærmer seg* 0?
Vi kan bruke tabellfunksjonen på lommeregneren til å undersøke dette nærmere.
Først ser vi på en serie med funksjonsverdier der x er mindre enn 0, og deretter en serie der x er større enn 0.

x nærmer seg null nedenfra

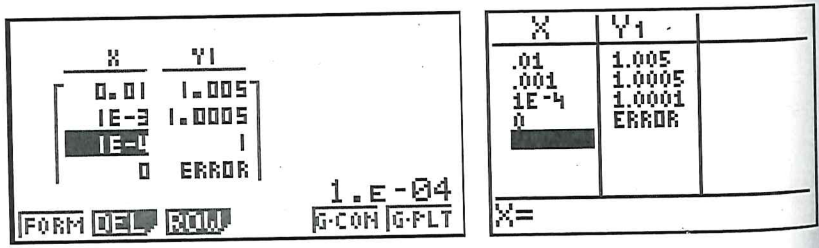
NB! Figuren viser tabellverdier for $f(-0{,}01)$, $f(-0{,}001)$ og $f(-0{,}0001)$. Legg merke til hva lommeregneren svarer på $f(0)$.



Figur 4.3 Du ser at $f(x)$ vokser mot 1 når x er mindre enn 0 og nærmer seg 0.

x nærmer seg null ovenfra

Figuren viser tabellverdier for $f(0{,}01)$, $f(0{,}001)$ og $f(0{,}0001)$.



Figur 4.4 Her *minker* $f(x)$ mot 1 når x er større enn 0 og nærmer seg 0.

Grenseverdien for $f(x)$ når x nærmer seg 0

Ovenfor så vi at $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ nærmer seg 1 både når x nærmer seg 0 nedenfra og når x nærmer seg 0 ovenfra.
Vi sier da at 1 er *grenseverdien* for $f(x)$ når x går mot 0.

Det at $f(x)$ går mot 1 som grenseverdi når x går mot 0, kan vi skrive på ulike måter.

Vi kan skrive

$$f(x)\to 1 \quad \text{når} \quad x\to 0 \qquad (1)$$

som vi leser «$f(x)$ går mot 1 når x går mot 0».

Vi kan også bruke symbolet *lim* til å uttrykke (1). Da skriver vi

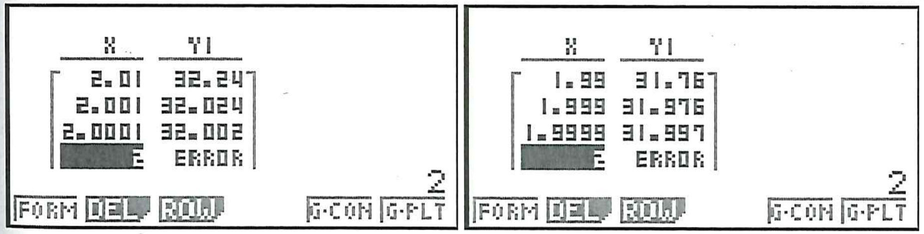
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

Dette kan vi lese «grenseverdien for $f(x)$ når x går mot 0, er 1».

lim er en forkortelse for det latinske ordet *limes*, som betyr grense. Jf. det engelske ordet *limit*.

Eksempel 1

Funksjonen $g(x)$ er gitt ved $g(x)=\dfrac{x^4-16}{x-2}$. Siden nevneren $x-2$ er null for $x=2$, er $g(x)$ ikke definert for $x=2$.
Men hva blir $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$?
Vi bruker tabellfunksjonen på lommeregneren for å se hva $g(x)$ nærmer seg når x nærmer seg 2. Figuren viser én serie med funksjonsverdier der x er mindre enn 2, og én der x er større enn 2.



Figur 4.5 Av tabellene ser det ut til at $g(x)$ nærmer seg 32 når x nærmer seg 2.

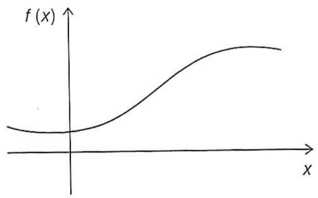
$$\lim_{x\to 2} g(x) = 32$$

Tegn grafen til $g(x)$ på lommeregneren.

4.5, 4.6 Noen ganger kan du se av grafen på lommeregneren at en funksjon ikke er definert i et punkt (hull på grafen), men ikke alltid. Det er avhengig av V-Window-verdiene.

Kontinuitet

Figuren viser grafen til en funksjon f. Grafen er en sammenhengende kurve. Når x endrer seg gradvis, endrer også $f(x)$ seg gradvis, uten noen sprang.
Litt upresist kan vi si at en graf er *sammenhengende* hvis det lar seg gjøre å tegne hele grafen uten å løfte blyanten fra papiret. Dette bruker vi til å forklare begrepet *kontinuitet*.



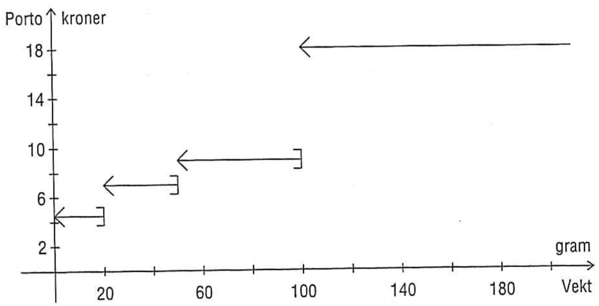
Figur 4.6

Når grafen til en funksjon f er sammenhengende, sier vi at f er en kontinuerlig funksjon.

Hvis grafen til en funksjon *ikke* er sammenhengende, er funksjonen ikke kontinuerlig. Vi sier at den er diskontinuerlig.

Eksempel 2

På figuren er portoen for A-post framstilt som en funksjon av vekten på brevet.
Du ser at grafen ikke er sammenhengende.
Den gjør et sprang for
$x = 20$, $x = 50$ og $x = 100$.
Funksjonen er *diskontinuerlig* for disse x-verdiene. Ellers er den kontinuerlig.



Figur 4.7

De aller fleste funksjoner du vil møte i dette kurset, er kontinuerlige i hele definisjonsmengden.

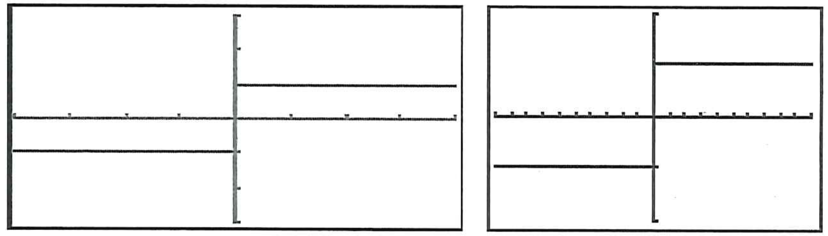
Eksempel 3

Vi tar for oss funksjonen $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

$|x|$ står for absoluttverdien av x.
Absoluttverdien av et tall forteller oss hvor langt fra origo tallet står på tallinja.
For eksempel er både $|-2|$ og $|2|$ lik 2.
Vi vil tegne grafen til $g(x)$ på lommeregneren. Vi taster inn funksjonsuttrykket slik:

CASIO Du må være i GRAPH-menyen.
Trykk [(] [OPTN] [F5](NUM) [F1](Abs) X [)] [÷] X

TEXAS Trykk [(] [Y=] [MATH] ▶(NUM) 1(abs() X [)] [)] [÷] X


Figur 4.8

Grafen gjør et sprang for $x = 0$. Funksjonen er diskontinuerlig for denne x-verdien. Ellers er den kontinuerlig.

Funksjonen g i eksempel 1 er diskontinuerlig for $x = 2$ fordi funksjonen ikke er definert for denne x-verdien.
Brevportofunksjonen i eksempel 2 er definert for alle x-verdier på figuren. Likevel er funksjonen diskontinuerlig i flere punkter fordi grafen gjør et sprang i disse punktene.
Hva vil du si om funksjonen i eksempel 3?

OPPGAVER

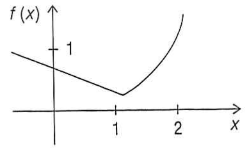
4.5
Gitt funksjonen $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$.
Bruk tabellfunksjonen på lommeregneren til å finne $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

4.6
Gitt funksjonen $g(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$.
Bruk tabellfunksjonen til å finne $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

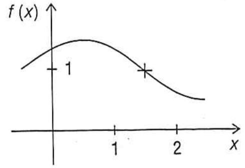
4.7

Bruk figuren og finn $\lim_{x \to 1,5} f(x)$ i hvert av tilfellene.
Avgjør også om $f(x)$ er kontinuerlig eller diskontinuerlig.

1



2



4.8

Er funksjonene i oppgavene 4.5 og 4.6 kontinuerlige eller diskontinuerlige? Begrunn svarene.

4.9

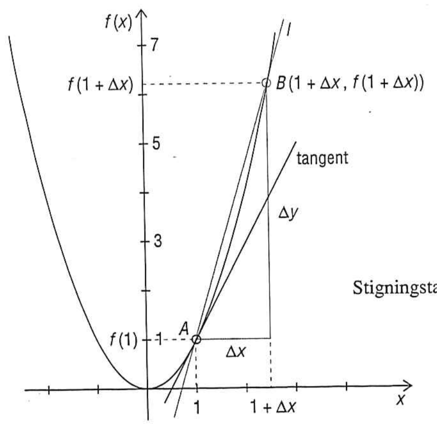
Tegn grafen til $h(x) = \dfrac{x-2}{|x-2|}$.

Er funksjonen kontinuerlig?
Bestem $\lim_{x \to -5} h(x)$ og $\lim_{x \to 5} h(x)$.

4.3 DEN DERIVERTE

Den deriverte av $f(x) = x^2$ for $x = 1$

Vi lar A være et punkt på grafen til $f(x) = x^2$ med 1 som førstekoordinat. A har da koordinatene $(1\,, f(1)) = (1\,,\,1)$.
Vi skal nå bruke den nye derivasjonsmetoden som vi nevnte på side 121 for å regne ut momentan vekstfart i dette punktet.
Gjennom A trekker vi en linje l som skjærer grafen i et punkt B.



Stigningstallet til linja l er $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Figur 4.9

l er en «hjelpelinje» som vi bruker for å finne stigningstallet til tangenten i A. Først må vi regne ut stigningstallet til l.

Vi lar Δx være forskjellen på førstekoordinatene til B og A. B får da førstekoordinaten $1 + \Delta x$, og andrekoordinaten $f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^2$.
Forskjellen på andrekoordinatene er

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(1+\Delta x) - f(1) = (1+\Delta x)^2 - 1^2 = 1 + 2\cdot(\Delta x) + (\Delta x)^2 - 1^2 \\ &= 2\cdot(\Delta x) + (\Delta x)^2\end{aligned}$$

Stigningstallet til l er

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2+\Delta x)}{\Delta x} = 2 + \Delta x$$

På figuren er Δx ca. 1,5. Stigningstallet til l er da ca. 3,5.

Hvis vi lar Δx bli litt mindre, vil B komme nærmere A, og l vil dreie seg om A. Stigningstallet til l vil fortsatt være $2 + \Delta x$, men $2 + \Delta x$ blir mindre.
Vi kan ikke velge Δx lik null, for da har ikke $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ noen mening. Men vi kan la Δx *nærme* seg null. Da vil $2 + \Delta x$ nærme seg 2.
Vi kan få stigningstallet til l så nær 2 vi vil, bare vi velger Δx nær nok null.

Tallet 2 er altså grenseverdien for $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (som er stigningstallet til l) når Δx går mot null.

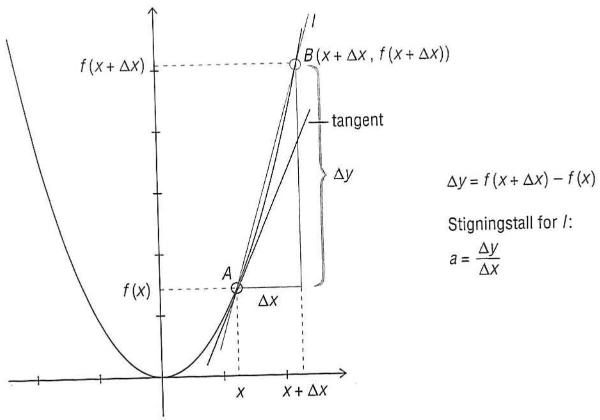
Denne grenseverdien kaller vi den deriverte av $f(x)$ for $x = 1$.
Det skriver vi $f'(1) = 2$.

Når Δx går mot null, vil linja l nærme seg tangenten som grensestilling, og stigningstallet til l vil nærme seg tangentens stigningstall.

$f'(1)$ er altså
- momentan vekstfart for $f(x)$ for $x = 1$
4.10 - stigningstallet for tangenten i punktet $(1\,, f(1))$

Den deriverte av x^2

Den metoden vi brukte ovenfor for å finne den deriverte av $f(x) = x^2$ for $x = 1$, skal vi bruke til å finne et generelt uttrykk for den deriverte av $f(x) = x^2$.
Framgangsmåten er den samme. Men punktet A får nå koordinatene $(x\,, f(x))$ i stedet for $(1\,, f(1))$, og hjelpepunktet B får koordinatene $(x + \Delta x\,, f(x + \Delta x))$.



Figur 4.10

Stigningstallet for linja l er $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Vi tenker oss at vi dreier linja l om A slik at punktet B nærmer seg A. Det er det samme som å la Δx nærme seg null.

Når B nærmer seg A, vil stigningstallet til l nærme seg stigningstallet til tangenten i A. Det betyr at stigningstallet til l nærmer seg $f'(x)$ som grenseverdi.
Dette viser at $f'(x)$ er grenseverdien for stigningstallet til linja l når Δx nærmer seg null.

Definisjonen på den deriverte kan altså skrives slik:

$f'(x)$ er grenseverdien for $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ når Δx går mot null.

Definisjonen kan også skrives slik:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

For å finne grenseverdien finner vi først Δy, og så $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Deretter lar vi Δx gå mot null for å se hva grenseverdien blir.

- $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$
  Funksjonstilveksten blir
  $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$
- $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$
- Når Δx går mot null, går uttrykket $2x + \Delta x$ mot $2x$.

Den deriverte av funksjonen $f(x) = x^2$ er altså

$$f'(x) = 2x \qquad (1)$$

NB! Nå kan vi finne så mange derivertverdier som vi vil, ved å sette inn verdier for x i (1).
For eksempel får vi at

$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$
$$f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$$
$$f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$$

Geometrisk betyr dette at stigningstallet for tangenten i de tre punktene (1 , 1), (0 , 0) og (–1 , 1) er 2, 0 og –2.
Generelt har vi at stigningstallet for tangenten i et punkt $(x\,,f(x))$ er $2x$.
Den deriverte gir oss altså en formel for stigningstallet for tangenten i et punkt på grafen.

Oppsummering
Framgangsmåten ovenfor gjelder generelt. Denne framgangsmåten kan vi oppsummere i tre trinn:

- Vi regner ut funksjonstilveksten $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.
- Vi dividerer med Δx for å få $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Vi finner hva $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ går mot når Δx nærmer seg null.

Den grenseverdien $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ går mot, er $f'(x)$.

Kommentar
På side 120 fant vi en tilnærmet verdi for den momentane vekstfarten i punktet $x = 1950$ for befolkningsfunksjonen $f(x)$.
I det tilfellet kan vi ikke bruke derivasjonsmetoden ovenfor, for vi har ikke noe funksjonsuttrykk. Likevel kan vi snakke om den deriverte også for denne funksjonen, og vi kan bruke skrivemåtene $f'(x)$ og $f'(1950)$.
Når vi for eksempel skriver $f'(1950) = 0{,}038$, tolker vi 0,038 som en tilnærmingsverdi for den «virkelige» verdien av $f'(1950)$, det vil si den verdien vi ville ha fått dersom vi hadde hatt et funksjonsuttrykk for $f(x)$.

Eksempel 1

Vi skal finne den deriverte av funksjonen $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ut fra definisjonen.

- Vi starter med en vilkårlig x-verdi og lar x øke med Δx.
  Funksjonstilveksten blir da

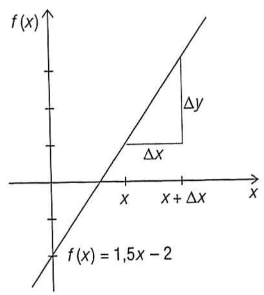
$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{1 \cdot x}{(x+\Delta x)\cdot x} - \frac{1\cdot(x+\Delta x)}{x\cdot(x+\Delta x)}$$
$$= \frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

- $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} = \frac{\frac{-\cancel{\Delta x}}{\cancel{x(x+\Delta x)}}\cdot \cancel{x(x+\Delta x)}}{\cancel{\Delta x}\cdot x(x+\Delta x)} = \frac{-1}{x(x+\Delta x)}$$
- Når Δx går mot 0, vil $x\,(x + \Delta x)$ gå mot x^2, slik at $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ går mot $\frac{-1}{x^2}$.
  Det viser at $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Eksempel 2

Vi vil finne den deriverte av funksjonen $f(x) = 1{,}5x - 2$.
Grafen til $f(x)$ er en rett linje med stigningstall 1,5.
Da vi regner en rett linje som en tangent til seg selv, følger det at «tangenten» til grafen har stigningstallet 1,5. Det vil si at $f'(x) = 1{,}5$.

Den deriverte av en førstegradsfunksjon er det samme som stigningstallet for grafen til funksjonen.



Figur 4.11

Ovenfor fant vi den deriverte ved en geometrisk betraktning. Nå vil vi vise hvordan vi finner $f'(x)$ ved å bruke definisjonen på den deriverte.

- $f(x + \Delta x) = 1{,}5(x + \Delta x) - 2 = 1{,}5x + 1{,}5 \cdot \Delta x - 2$
  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (1{,}5x + 1{,}5 \cdot \Delta x - 2) - (1{,}5x - 2) = 1{,}5 \cdot \Delta x$
- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1{,}5 \cdot \Delta x}{\Delta x} = 1{,}5$
- Her blir $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ lik 1,5 for alle verdier av Δx, også når Δx går mot null.

Den deriverte av funksjonen $f(x) = 1{,}5x - 2$ er altså $f'(x) = 1{,}5$.

OPPGAVER

4.10
Bruk definisjonen på den deriverte til å finne $f'(2)$ når $f(x) = x^2$.

4.11
Bruk definisjonen på den deriverte til å finne $f'(x)$ når
a $f(x) = x^2 + 1{,}5x$ **b** $f(x) = 5x^2$
c $f(x) = 3x + 5$

▲ **4.12**
Vis at $(x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2{\cdot}\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$
Bruk dette til å finne $f'(x)$ når $f(x) = x^3$.

4.13
Hva er $f'(x)$ når
a $f(x) = 5x - 12$ **b** $f(x) = -2{,}5x + 6$
c $f(x) = 8$ **d** $f(x) = -8$

4.4 DERIVASJON AV ET FLERLEDDET UTTRYKK

Vi skal nå derivere uttrykk som består av flere ledd. Men først vil vi repetere noen derivasjoner fra forrige avsnitt. I eksempler og oppgaver fant vi at

$x' = 1 \qquad (x^2)' = 2x \qquad (x^3)' = 3x^2$

Ofte står det en konstant faktor foran x, x^2, x^3 osv.
Denne faktoren står uforandret når vi deriverer. For eksempel er

$(5x)' = 5 \qquad (5x^2)' = 5 \cdot 2x \qquad (5x^3)' = 5 \cdot 3x^2$

Eksempel 1

Vi skal derivere $f(x) = -6x^2$.
Her er –6 den konstante faktoren. Altså får vi

$$f'(x) = (-6x^2)' = -6 \cdot (x^2)' = -6 \cdot 2x = -12x$$

Et flerleddet uttrykk deriverer vi ledd for ledd.

Eksempel 2

Vi skal derivere funksjonen $f(x) = 5x^2 - 3x + 7$.
Her har vi tre ledd. Vi deriverer hvert ledd for seg. Da får vi

$$f'(x) = (5x^2 - 3x + 7)' = (5x^2)' - (3x)' + 7' = 5 \cdot 2x - 3 + 0 = 10x - 3$$

Den deriverte av x^r

Vi har funnet at
$(x^1)' = 1 \; (= 1 \cdot x^0)$
$(x^2)' = 2x$
$(x^3)' = 3x^2$
Hva tror du $(x^4)'$ er?

På side 165 viser vi at

$(x^r)' = rx^{r-1}$ der r er en konstant (1)

(1) gjelder for alle verdier av r. Men når r ikke er et helt tall, må vi forutsette at $x > 0$, jf. side 41.

Eksempel 3

Her er noen eksempler på bruk av (1).

$$(x^8)' = 8x^{8-1} = 8x^7$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)' = (x^{-3})' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\cdot x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$$

Oppsummering

- $k' = 0$, når k er en konstant
- $x' = 1$ $\quad (x^2)' = 2x \quad (x^3)' = 3x^2 \quad (x^r)' = rx^{r-1}$
- $(k\cdot x)' = k \quad (k\cdot x^2)' = k\cdot 2x \quad (k\cdot x^3)' = k\cdot 3x^2$

- $(u+v)' = u' + v'$
- $(u-v)' = u' - v'$

4.14, 4.15 Her er u og v uttrykk som inneholder x.

Fortegnslinje for den deriverte

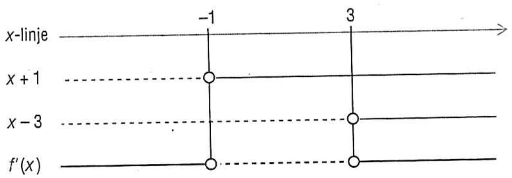
En funksjon er gitt ved $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$.

Vi finner $f'(x)$ og setter opp en fortegnslinje for $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 - 2x - 3 + 0 = x^2 - 2x - 3$$

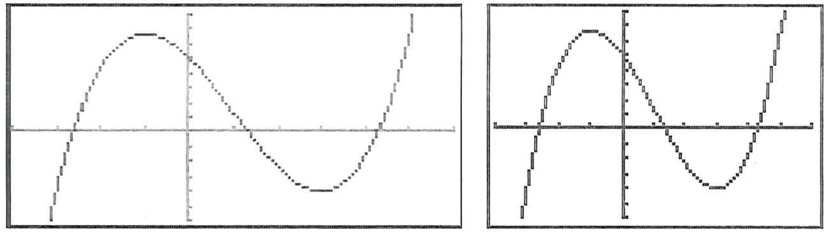
Vi faktoriserer $f'(x)$.

$$f'(x) = 0$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$x = -1 \lor x = 3$$
$$f'(x) = (x-(-1))(x-3) = (x+1)(x-3)$$



Figur 4.12

Hva forteller fortegnslinja for $f'(x)$ om $f(x)$?
Ut fra definisjonen av den deriverte kan du sikkert si litt om det.
Men du kan også tegne grafen til $f(x)$ på lommeregneren og se om du ser noen sammenheng mellom grafen og fortegnslinja for $f'(x)$.



Figur 4.13 Ser du noen sammenheng?

OPPGAVER

4.14
Finn $f'(x)$ når
a $f(x) = -24$
b $f(x) = 12 - x$
c $f(x) = 5x + 1$
d $f(x) = x^2 + 2x - 10$

4.15
Finn $f'(x)$ når
a $f(x) = 3x^4 - x^2 + 2x$
b $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$
c $f(x) = -2{,}5x^4 + 0{,}5x^2 - 2{,}3x + 1$
d $f(x) = \frac{2x-3}{5}$

▲ **e** $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{2}{x}$
▲ **f** $f(x) = \frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{x^5} + 2\sqrt{x} - 12$

4.16
Funksjonen f er gitt ved

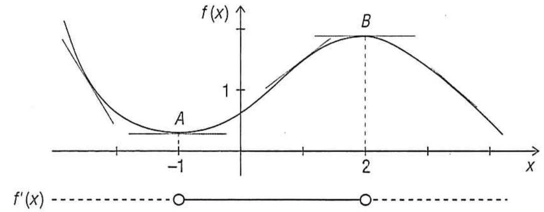
$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x + 4$$

Finn $f'(x)$ og sett opp fortegnsskjema.
Tegn grafen til $f(x)$ på lommeregneren.
Hva kan du si om sammenhengen mellom fortegnslinja for $f'(x)$ og grafen?

4.5 DEN DERIVERTE VED DRØFTING AV FUNKSJONER

Fortegnet til $f'(x)$ og stigningen til grafen

På figuren har vi tegnet grafen til en funksjon f. Grafen har bunnpunkt for $x = -1$ og toppunkt for $x = 2$.
Under figuren har vi tegnet fortegnslinja for $f'(x)$.



Figur 4.14

Vi vil begrunne fortegnslinja ut fra grafen.

- I bunnpunktet A og i toppunktet B er tangenten parallell med x-aksen, og den har derfor null som stigningstall.
  Det viser at $f'(-1) = 0$, og at $f'(2) = 0$.
- Til venstre for bunnpunktet A går grafen nedover mot høyre.
  En tangent til grafen må da ha negativt stigningstall. Det betyr at den deriverte er negativ i dette området.
  $f'(x)$ er altså negativ når x er mindre enn -1.
- Mellom A og B går grafen oppover. Hvis vi tegner en tangent her, må den ha positivt stigningstall.
  $f'(x)$ er derfor positiv når x er mellom -1 og 2.
- For $x > 2$ synker grafen på nytt.
  $f'(x)$ er negativ for $x > 2$.

Den sammenhengen vi fant ovenfor mellom den deriverte og funksjonen f, gjelder generelt.

Når $f'(x)$ er positiv i et intervall, vokser $f(x)$ i dette intervallet.
Når $f'(x)$ er negativ i et intervall, minker $f(x)$ i dette intervallet.

Ovenfor begrunnet vi fortegnslinja for $f'(x)$ ut fra grafen. Vanligvis går vi den motsatte veien. Vi bruker fortegnslinja til den deriverte til å drøfte hvordan grafen går.
Med andre ord: Vi bruker den deriverte til å drøfte funksjonen.

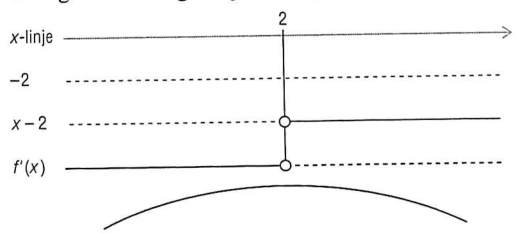
Eksempel 1

Vi vil drøfte funksjonen $f(x) = -x^2 + 4x + 1$.

Først deriverer vi $f(x)$ og faktoriserer den deriverte.

$$f'(x) = -2x + 4 = -2(x - 2)$$

Så tegner vi fortegnsskjema for $f'(x)$.



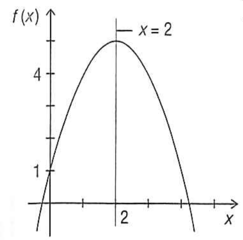
Figur 4.15

Fortegnet til $f'(x)$ viser hvor grafen stiger, og hvor den synker. Det har vi antydet under fortegnsskjemaet.
Men den «kurven» vi har skissert, viser ikke formen på grafen.

- I intervallet $\langle \leftarrow, 2\rangle$ er $f'(x)$ positiv. Her stiger grafen mot høyre.
- I intervallet $\langle 2, \rightarrow\rangle$ er $f'(x)$ negativ. Her synker grafen mot høyre.
- For $x = 2$ går grafen over fra å stige til å synke. Altså må grafen ha et toppunkt for $x = 2$.

$f(2) = 5$. Punktet $(2, 5)$ er derfor toppunkt på grafen.
$f(x)$ har ingen minsteverdi. Grafen har ikke noe bunnpunkt.

Verdimengden er $V_f = \langle \leftarrow, 5]$.



Figur 4.16

4.17a, b

Fra grunnkurset vet du at grafen til en andregradsfunksjon er en parabel med symmetrilinje gjennom toppunktet eller bunnpunktet. Der det er toppunkt eller bunnpunkt på grafen, er den deriverte lik null.
I dette tilfellet er $f'(2) = 0$. Symmetrilinja har derfor likningen $x = 2$.

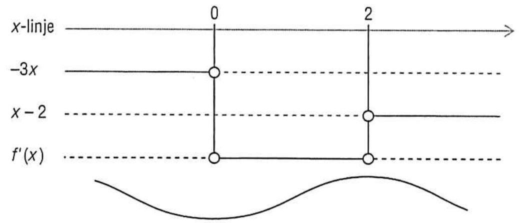
Eksempel 2

Vi vil drøfte funksjonen

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$$

Først deriverer vi funksjonen og setter opp et fortegnsskjema for den deriverte.

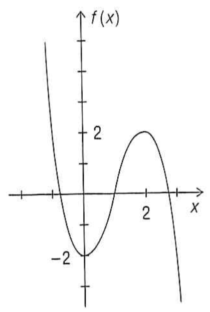
$$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2)$$



Figur 4.17

Under fortegnsskjemaet har vi skissert hvor grafen går nedover, og hvor den går oppover.

I intervallene $\langle \leftarrow, 0\rangle$ og $\langle 2, \rightarrow\rangle$ er $f'(x)$ negativ. I disse intervallene synker grafen mot høyre.
I intervallet $\langle 0, 2\rangle$ er $f'(x)$ positiv. Her stiger grafen mot høyre.
For $x = 0$ går grafen over fra å synke til å stige. Altså må grafen ha et bunnpunkt for $x = 0$.
For $x = 2$ går grafen over fra å stige til å synke. Her må grafen ha et toppunkt.



Figur 4.18

Punktet (0 , –2) er et bunnpunkt på grafen. Men dette punktet er ikke det laveste punktet på grafen. Tilsvarende er (2 , 2) et toppunkt, uten å være det høyeste punktet på grafen.

Verdimengden $V_f = \mathbb{R}$.

Vi kan si at grafen har et *lokalt* toppunkt i (2 , 2), og et *lokalt* bunnpunkt i (0 , –2).

4.17 c–e

Maksimal- og minimalverdier

Andrekoordinaten til et toppunkt er en *maksimalverdi* for funksjonen. Andrekoordinaten til et bunnpunkt er en *minimalverdi*.
I eksempel 2 er altså 2 en maksimalverdi for funksjonen, og –2 er en minimalverdi.

En fellesbetegnelse for maksimalverdi og minimalverdi er *ekstremalverdi*.
Både 2 og –2 er altså ekstremalverdier i eksempel 2.
Hvis du i en oppgave blir bedt om å finne eventuelle ekstremalverdier for en funksjon, skal du samtidig avgjøre om det er maksimal- eller minimalverdier.

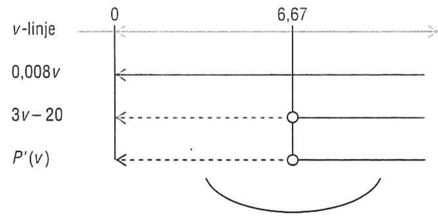
Eksempel 3

Når en knekkand flyr over Sahara, er den energien den bruker per tidsenhet, avhengig av farten den flyr med. En modell for dette energiforbruket kan være

$$P(v) = 0{,}008v^3 - 0{,}08v^2 + 6$$

der $P(v)$ watt er energien per tidsenhet og v m/s er farten.
For å bestemme den farten som gjør at energiforbruket per tidsenhet blir minst mulig, deriverer vi $P(v)$.

$$P'(v) = 0{,}008 \cdot 3v^2 - 0{,}08 \cdot 2v = 0{,}008v \cdot (3v - 20)$$



Figur 4.19

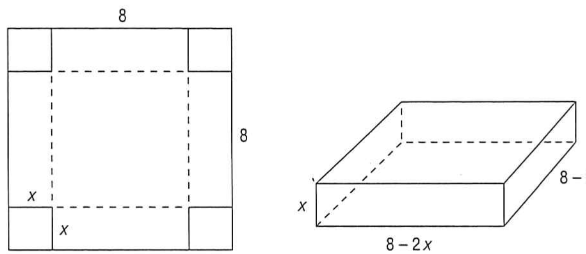
Vi ser at $P(v)$ har minimalverdi for $v = 6{,}67$.
Det betyr at energiforbruket per tidsenhet er minst når farten er ca. 6,7 m/s.

Eksempel 4

Av en kvadratisk plate med side 8 cm skal vi lage en eske (uten lokk) med høyde x cm. Det gjør vi på den måten at vi i hvert hjørne klipper bort et kvadrat med side x cm og deretter bretter langs de stiplede linjene på figuren. Vi får da en eske der bunnflaten er et kvadrat med side $(8 - 2x)$ cm.
Volumet av esken er en funksjon av x gitt ved

$$V(x) = (8 - 2x)^2 \cdot x$$

Hvorfor må x være større enn null og mindre enn fire?



Figur 4.20

Funksjonsuttrykket kan omformes til

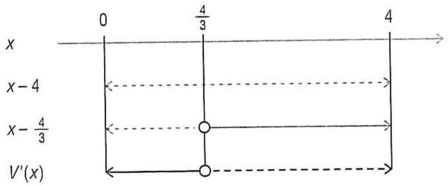
$$V(x) = 4x^3 - 32x^2 + 64x$$

For å bestemme x slik at esken får størst mulig volum, deriverer vi $V(x)$.

$$V'(x) = 12x^2 - 64x + 64 = 12(x-4)\left(x - \frac{4}{3}\right)$$

$12x^2 - 64x + 64 = 0$

$x = \frac{4}{3} \lor x = 4$



Figur 4.21

Vi ser at $V(x)$ har maksimalverdi for $x = \frac{4}{3}$. Esken har størst volum når høyden er $\frac{4}{3}$ cm. Det største volumet er $V\left(\frac{4}{3}\right)\text{cm}^3 = 38\ \text{cm}^3$.

Oppsummering
Eksemplene ovenfor viser hvordan vi kan bruke den deriverte til å drøfte en funksjon.

- Først deriverer vi funksjonsuttrykket.
- Så tegner vi fortegnsskjema for den deriverte.
- Av dette fortegnsskjemaet kan vi se hvor grafen stiger, og hvor den synker. Og da kan vi også avgjøre om grafen har et toppunkt eller bunnpunkt.

TIPS! Det er lurt å tegne grafen på lommeregneren for å kontrollere resultatet av drøftingen.

OPPGAVER

4.17
Finn $f'(x)$. Bestem hvor grafen synker, og hvor den stiger. Bestem eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f. Tegn grafen.
Hva er verdimengden til f?

a $f(x) = x^2 - 4x + 3$
b $f(x) = -3x^2 + 12x + 2$
c $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x$
d $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$
e $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2$

4.18
En ball kastes rett opp. Etter t sekunder er den $h(t)$ meter over bakken.
$h(t) = -4{,}9t^2 + 9{,}8t + 1{,}5$
Bruk den deriverte til å finne hvor høyt ballen kommer før den snur.

4.19
Av en rektangelformet papplate på 48 cm × 30 cm skal du lage en eske uten lokk ved å klippe vekk kvadrater fra hjørnene og deretter brette opp (jf. eksempel 4). Siden i kvadratene kaller vi x cm.

a Vis at volumet av esken blir $V(x)$ cm^3, der $V(x) = 4x^3 - 156x^2 + 1440x$.
b Finn det største volumet esken kan få.

4.6 NOEN PRAKTISKE TOLKNINGER AV DEN DERIVERTE

I dette avsnittet skal vi se på noen praktiske tolkninger av den deriverte knyttet til blant annet emner innen fagene fysikk og bedriftsøkonomi.

Eksempel 1

En tank blir fylt opp med vann.
t minutter etter at fyllingen startet, er volumet av vannet $V(t)$ m^3.

$$V(t) = -0{,}25t^2 + 10t, \quad t \in [0, 20]$$

Vekstfarten for volumet blir

$$V'(t) = -0{,}25 \cdot 2t + 10 \cdot 1 = -0{,}5t + 10$$

Vi regner ut vekstfarten for noen t-verdier.

t	0	5	10	15	20
$V'(t)$	10	7,5	5	2,5	0

Vekstfarten får enheten m^3 per minutt.

I starten ($t = 0$) strømmer det inn 10 m^3 per minutt.
Midt i fylleperioden er innstrømmingsfarten nede i 5 m^3/minutt.
Ved $t = 20$ er oppfyllingen slutt.
Fordi $V(20) = -0{,}25 \cdot 20^2 + 10 \cdot 20 = 100$ er det da 100 m^3 vann i tanken.

Grensekostnad

Totalkostnaden og inntekten ved en vareproduksjon vil ofte være en funksjon av den varemengden bedriften produserer.
Hvis for eksempel $K(x)$ kr er totalkostnaden ved produksjon av x enheter av en vare, vil $K(300)$ kr være totalkostnaden når det produseres 300 enheter.
Men hva vil $K'(300)$ fortelle oss om produksjonen? Tenk etter før du leser videre.
Vi vet at $K'(x)$ er det samme som vekstfarten for totalkostnaden.

$K'(x)$ er grensekostnaden når det produseres x enheter. (1)

Enheten for $K(x)$ er vanligvis kroner, og x står for antall vareenheter.
Enheten for $K'(x)$ blir da kr/enhet.
I praksis betyr det at $K'(x)$ viser hvor mye $K(x)$ vokser når produksjonen øker med én enhet.

Grensekostnaden ved en produksjon viser hva det vil koste å øke produksjonen med én enhet.

Eksempel 2

Totalkostnaden $K(x)$ kroner for en kakeproduksjon er gitt ved

$$K(x) = 0{,}1x^2 + 50x + 2000 \qquad \text{for } x < 500$$

der x er antall produserte kaker per uke.

$$K(300) = 0{,}1 \cdot 300^2 + 50 \cdot 300 + 2000 = 26\,000$$

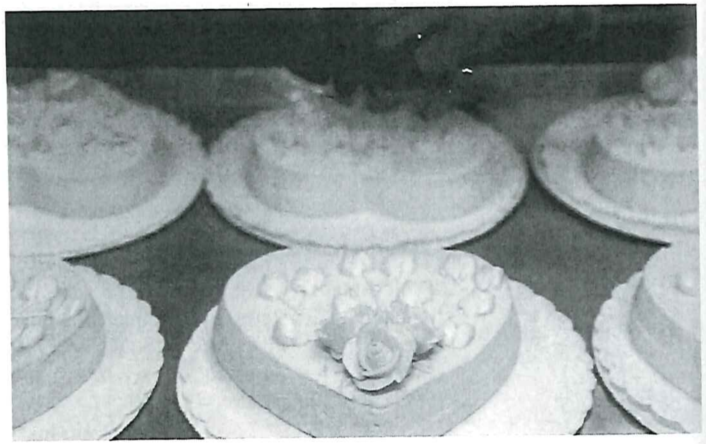
Det vil si at det koster 26 000 kr å produsere 300 enheter per uke.

Vi finner grensekostnaden når det produseres 300 enheter ved å bruke (1).

$$K'(x) = 0{,}2x + 50$$

$$K'(300) = 0{,}2 \cdot 300 + 50 = 110$$

Grensekostnaden er 110 kr/enhet.
Det betyr at produksjonskostnadene øker med 110 kr hvis produksjonen øker med én enhet fra 300 til 301 enheter.



4.20 Hvis vi bruker $K(301) - K(300)$ til å regne ut kostnadsøkningen, får vi

$$K(300) = 26\,000$$
$$K(301) = 0{,}1 \cdot 301^2 + 50 \cdot 301 + 2000 = 26\,110{,}10$$
$$K(301) - K(300) = 110{,}10$$

Etter dette skulle kostnadsøkningen bli 110,10 kr. Forskjellen har ingen praktisk betydning. Vi må huske på at kostnadsfunksjonen bare er en modell og ikke et eksakt uttrykk for kostnadene.
Kan du forklare hvorfor de to utregningene ovenfor ikke gav nøyaktig samme resultat?

Grenseinntekt

Med inntekten $I(x)$ kr for en vareproduksjon mener vi salgsinntekten, det vil si det beløpet bedriften får når den selger x enheter. Inntekt er altså ikke det samme som overskudd eller fortjeneste.

Når vi deriverer en kostnadsfunksjon, får vi grensekostnad.
Når vi deriverer en inntektsfunksjon, får vi *grenseinntekt*.

$I'(x)$ er grenseinntekten når det selges x enheter.

I praksis betyr det at $I'(x)$ viser hvor mye $I(x)$ vokser når omsetningen øker med én enhet.

I eksempler og oppgaver forutsetter vi at bedriften får solgt alle varene.

Eksempel 3

Inntekten for kakene i eksempel 2 er gitt ved

$$I(x) = 125x - 0{,}05x^2 \qquad x < 500$$

Vi vil finne grenseinntekten når det produseres 300 enheter.

$$I'(x) = 125 - 0{,}1x$$

$$I'(300) = 125 - 0{,}1 \cdot 300 = 95$$

Grenseinntekten er 95 kr/enhet.
Etter dette vil inntekten øke med 95 kr når produksjonen øker med én enhet fra 300 enheter til 301 enheter.

Overskudd

Differansen mellom inntekten $I(x)$ og totalkostnaden $K(x)$ for en vare kaller vi *overskudd*. Overskuddet $O(x)$ er gitt ved

$$O(x) = I(x) - K(x)$$

I eksemplene 2 og 3 fant vi at $K'(300) = 110$ og $I'(300) = 95$.
Vil det ut fra dette lønne seg å øke produksjonen fra 300 enheter til 301 enheter?
I oppgave 4.22 skal vi se litt mer på overskuddsfunksjonen $O(x)$ for denne vareproduksjonen.

TIPS! Når vi tegner to grafer i samme bilde, vil lommeregneren normalt tegne den ene grafen først. Men hvis du ønsker det, kan du få den til å tegne grafene samtidig.
Legg inn $I(x)$ og $K(x)$ ut for Y1 og Y2 på vanlig måte. Bruk disse verdiene i V-Window (WINDOW): Xmin = 0 Xmax = 500
Xscale = 100 Ymin = 0 Ymax = 56000 Yscale = 10000

CASIO Du må være i GRAPH-menyen. Trykk [SET UP] ▼ ▼ ▼ [F1] (On). På fjerde linje står det nå: Simul Graph: On) Trykk [EXE] og [F6] (DRAW).

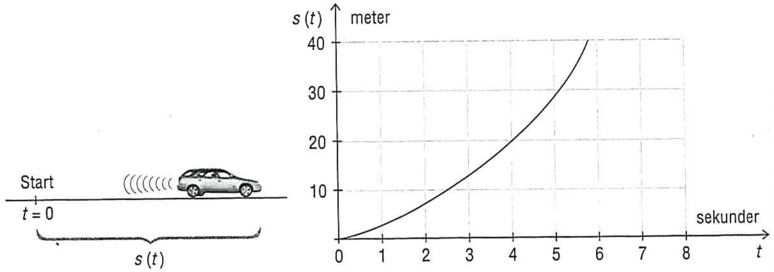
TEXAS Trykk [MODE] ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ (Simul) (På sjette linje er Simul markert.) Trykk [CLEAR] og [GRAPH]. (Hvis du vil tegne grafene samtidig flere ganger, kan du deaktivere og aktivere en av funksjonene før du trykker [GRAPH].)

4.21, 4.22

Fart og akselerasjon

Vi skal nå ta for oss to størrelser fra fysikken, fart og akselerasjon, som begge kan defineres ved å bruke den deriverte.
Figuren viser en veigraf. $s(t)$ meter er avstanden fra et gitt utgangspunkt t sekunder etter at en bil startet.
Den deriverte av $s(t)$ viser hvor fort $s(t)$ vokser ved tidspunktet t. $s'(t)$ er derfor det samme som farten i dette tidspunktet. Det kan vi også se av benevningen.

NB! Benevningen for $s'(t)$ er benevningen for $s(t)$ dividert med benevningen for t, det vil si m/s.



Figur 4.22

4.23a Hvor langt har bilen kommet etter 4 sekunder?

Eksempel 4

I et fallskjermhopp lar vi $s(t)$ m være lengden hopperen faller i løpet av de t første sekundene, før skjermen åpner seg. Det viser seg at $s(t)$ tilnærmet kan settes lik

$$s(t) = -0{,}2t^3 + 4{,}9t^2 - 1{,}4t \qquad 0 < t < 6$$

Vi vil finne hvor langt hopperen har falt i løpet av de første 4 sekundene, og hvor stor farten er etter 4 sekunder.

$$s(4) = -0{,}2 \cdot 4^3 + 4{,}9 \cdot 4^2 - 1{,}4 \cdot 4 = 60$$

Hopperen har falt ca. 60 meter de første 4 sekundene.
Farten er den deriverte av veien:

$$v(t) = s'(t) = -0{,}6t^2 + 9{,}8t - 1{,}4$$

$$v(4) = s'(4) = -0{,}6 \cdot 4^2 + 9{,}8 \cdot 4 - 1{,}4 = 28{,}2$$

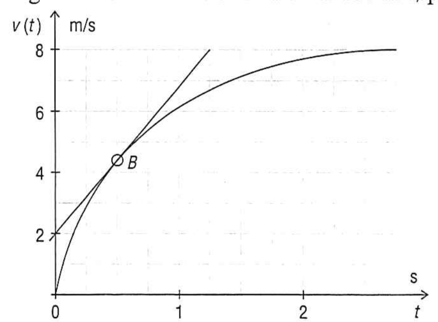
4.23b – 4.25 Etter 4 sekunder har hopperen farten 28 m/s. Oj!

Da vi deriverte avstandsfunksjonen $s(t)$ i eksempel 4, fikk vi fartsfunksjonen $v(t) = -0{,}6t^2 + 9{,}8t - 1{,}4$.
$v(t)$ kan også deriveres. $v'(t)$ forteller hvor fort $v(t)$ vokser i forhold til t, det vil si hvor fort farten endrer seg. Det er det samme som akselerasjon. Akselerasjonen ved tidspunktet t er altså

$$a(t) = v'(t) = -1{,}2t + 9{,}8$$

$v(t) = s'(t)$ er farten ved tidspunktet t.
$a(t) = v'(t)$ er akselerasjonen ved tidspunktet t.

Figuren viser farten i starten av et 100 m-løp.



Figur 4.23

Av figuren ser vi at farten er 6 m/s etter 1 sekund. Hvor stor er farten etter 2 sekunder?
I punktet B har vi tegnet tangenten til grafen for $t = 0{,}5$.

Stigningstallet til tangenten får enheten $\frac{m}{s}$/s, som kan skrives m/s per sekund eller m/s^2. Stigningstallet for tangenten er 4,8. Det forteller at akselerasjonen er 4,8 m/s^2 et halvt sekund etter startskuddet.

Eksempel 5

Ved en fartstest av en motorsykkel ble sykkelens fart registrert. t sekunder etter start er farten $v(t)$ m/s gitt ved:

$$v(t) = -0{,}1t^3 + 1{,}4t^2 + 0{,}5t \qquad 0 < t < 6$$

Vi vil finne fart og akselerasjon etter 3 sekunder.

$$v(3) = -0{,}1\cdot 3^3 + 1{,}4\cdot 3^2 + 0{,}5\cdot 3 = 11{,}4$$

Etter 3 sekunder er farten ca. 11 m/s.

$$v'(t) = -0{,}3t^2 + 2{,}8t + 0{,}5$$

$$v'(3) = -0{,}3\cdot 3^2 + 2{,}8\cdot 3 + 0{,}5 = 6{,}2$$

Etter 3 sekunder er akselerasjonen 6,2 m/s^2.
(Det vil si at etter 3 sekunder har motorsykkelen en akselerasjon som svarer til en fartsendring på 6,2 m/s for hvert sekund.)

Lommeregnermagi

På grunnkurset lærte du hvordan du kunne bruke lommeregneren til å gjøre hele regnejobben når du skulle finne momentan vekstfart for en funksjon du kjente funksjonsuttrykket til.

Vi vil repetere dette ved å regne ut $v'(3)$ i eksempel 5 på lommeregneren.

CASIO

Alternativ 1
Gå til RUN-menyen. Trykk [OPTN] [F4] (CALC) og [F2] (d/dx).
Skriv $-0.1x^3 + 1.4x^2 + 0.5x$, 3).
(Det står nå d/dx ($-0.1x^3 + 1.4x^2 + 0.5x$, 3) i vinduet.)
Trykk [EXE].

Alternativ 2
Gå til RUN-menyen. Trykk [SET UP] ▼ ▼ ▼ [F1]. (Derivative-feltet står nå i On-posisjon.) Trykk [EXIT].
Gå til GRAPH-menyen og skriv $-0.1x^3 + 1.4x^2 + 0.5x$ ut for Y1.
Gå til TABLE-menyen og trykk [F6] (TABL). Skriv [3] og trykk [EXE].
I kolonnen for Y′ står verdien for v′(3).
(Hvis du i tabellen vil ha oversikt over flere derivertverdier, kan du trykke [F5] (RANG) og velge de aktuelle verdiene.)

TEXAS

Alternativ 1
Trykk [MATH] [8] (nDeriv( ). Det står nå nDeriv(på skjermen.
Skriv $-0.1x^3 + 1.4x^2 + 0.5x$, x , 3). Trykk [ENTER].

Alternativ 2
Trykk [Y=]. Skriv $-0.1x^3 + 1.4x^2 + 0.5x$ ut for y1 = .
Legg inn Window-verdiene:
Xmin = 0, Xmax = 7, Ymin = 0, Ymax = 40
Trykk [CALC] [6] (dy/dx) 3 [ENTER].

OPPGAVER

4.20
Totalkostnaden ved en vareproduksjon er gitt ved

$K(x) = 0{,}03x^2 + 250x + 30\,000$

der $K(x)$ kr er totalkostnaden når det produseres x enheter per uke.

a Regn ut
1 $K'(200)$ **2** $K'(400)$

b Hva sier svarene i oppgave a om grafen? Hva sier de om kostnadene?

4.21
Inntekten i kroner ved salg av x enheter av en vare er gitt ved
$I(x) = 30x - 0{,}002x^2 \qquad x < 6000$

a Regn ut $I'(2000)$ og $I'(4000)$.
Hva sier svarene om inntekten?
Totalkostnaden er gitt ved
$K(x) = 12\,000 + 12x + 0{,}001x^2$

b Regn ut $K'(2000)$ og $K'(4000)$.
Hva sier svarene om kostnadene?
Overskuddet ved produksjonen og salget er gitt ved $O(x) = I(x) - K(x)$.

▲ **c** Bruk svarene i oppgave a og b til å avgjøre om det vil lønne seg å øke produksjonen fra
1 2000 til 2001 enheter
2 4000 til 4001 enheter

d Vis at $O(x) = -0{,}003x^2 + 18x - 12\,000$
Hvilken produksjonsmengde gir størst overskudd? Hvor stor er grenseinntekten og grensekostnaden ved denne produksjonen?

4.22
Finn overskuddsfunksjonen $O(x)$ for vareproduksjonen i eksemplene 2 og 3. Hvilken produksjonsmengde gir størst overskudd?

4.23
a Ta for deg figur 4.22. Hvor stor er farten til bilen etter 4 sekunder?
Hvordan ser du av figuren at bilen har større fart etter 5 sekunder enn etter 4 sekunder?
b Hvor stor er farten til fallskjermhopperen i eksempel 4 etter 5 sekunder?

4.24
t sekunder etter at en bil startet, er avstanden fra utgangspunktet gitt ved
$s(t) = 0{,}02t^3 + 0{,}6t^2 + 2{,}3t$
Finn farten til bilen etter
a 2 sekunder **b** 5 sekunder

4.25
Vi tar for oss skituren for Mona-Lisa fra oppgavesamlingen på grunnkurset. Hun stod på ski nedover en bakke. På t sekunder kom hun $s(t)$ m nedover i bakken, der $s(t) = 2t + 0{,}335t^2$.
Hvor stor fart hadde Mona-Lisa etter
a 8 sekunder **b** 10 sekunder

4.26
a Ta for deg figur 4.23. Hvor stor er akselerasjonen etter 1 sekund? Hvordan kan du se av figuren at akselerasjonen er mindre etter 2 sekunder enn etter 1 sekund?
b Hvor stor er akselerasjonen til motorsykkelen i eksempel 5 etter 5 sekunder?

4.27
Ved en akselerasjonstest fant de at bilens fart etter t sekunder kan uttrykkes ved $v(t)$ m/s der
$v(t) = -0{,}1t^3 + 1{,}4t^2 + 0{,}5t \qquad t < 9$
Regn ut bilens akselerasjon etter
a 2 sekunder **b** 6 sekunder

4.7 DEN ANDREDERIVERTE OG KRUMNING AV KURVER

Andrederivert

En funksjon f er gitt ved $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Vi deriverer og får

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$f'(x)$ er en vanlig andregradsfunksjon, som vi kan derivere. Da får vi

$$[f'(x)]' = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6$$

Den deriverte av $f'(x)$ kaller vi *den andrederiverte* av $f(x)$.

I stedet for $[f'(x)]'$ skriver vi $f''(x)$.
I dette eksemplet har vi

$$f''(x) = 6x - 6$$

$f''(x) < 0 \implies$ grafen vender den hule siden ned
$f''(x) > 0 \implies$ grafen vender den hule siden opp

Eksempel 1
Vi skal finne den første- og andrederiverte av $f(x) = x^4 - 3x^3$.

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2$$
$$f''(x) = 12x^2 - 18x$$

I avsnitt 4.5 brukte vi fortegnet til $f'(x)$ for å avgjøre om $f(x)$ vokser eller minker.

- Når $f'(x)$ er positiv, vokser $f(x)$.
- Når $f'(x)$ er negativ, minker $f(x)$.

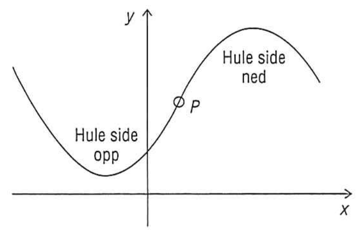
$f''(x)$ er den deriverte av $f'(x)$. Derfor vil fortegnet til $f''(x)$ vise om $f'(x)$ vokser eller minker.

Når $f''(x)$ er positiv, vokser $f'(x)$.
Når $f''(x)$ er negativ, minker $f'(x)$. (1)

Det betyr at fortegnet til $f''(x)$ forteller om $f'(x)$ øker eller minker.
4.28 Dermed sier det også noe om hvordan grafen krummer.

Krumning av kurver

Når vi skal forklare hvilken vei en graf krummer, bruker vi uttrykket grafens *hule side*.
På figuren vender den hule siden opp til venstre for P. Til høyre for P vender den hule siden ned.
Vi skal nå se hvordan vi kan bruke den andrederiverte av en funksjon til å finne ut hvilken vei grafen krummer.
Vi starter med et par eksempler.



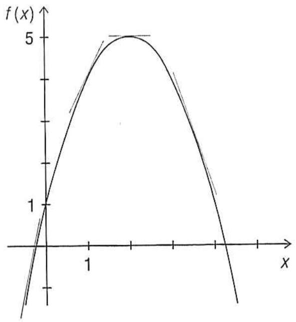
Figur 4.24

Eksempel 2
En funksjon er gitt ved $f(x) = -x^2 + 4x + 1$.
Vi deriverer to ganger og får

$$f'(x) = -2x + 4$$
$$f''(x) = -2$$

$f''(x)$ er negativ for alle verdier av x. $f'(x)$ må derfor minke hele tiden.
Jo lenger til høyre vi velger tangeringspunktet, desto mindre blir altså

stigningstallet for tangenten. (Vi har tegnet inn noen tangenter på grafen som viser dette.) Det betyr at grafen krummer med den hule siden ned.



Figur 4.25

$f''(x) < 0$
$\Downarrow$
$f'(x)$ minker
$\Downarrow$
grafen vender den hule siden ned

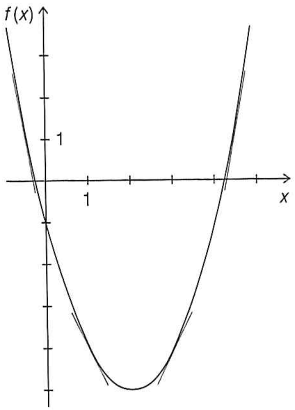
Eksempel 3

Vi tar for oss funksjonen $f(x) = x^2 - 4x - 1$.
Vi deriverer og får

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f''(x) = 2$$

Her er $f''(x)$ positiv, og da vokser $f'(x)$ hele tiden.
Her får altså tangenten større stigningstall jo lenger til høyre vi velger tangeringspunktet.
Grafen må derfor krumme med den hule siden opp.



Figur 4.26

$f''(x) > 0$
$\Downarrow$
$f'(x)$ vokser
$\Downarrow$
grafen vender den hule siden opp

I eksemplene 2 og 3 fant vi en sammenheng mellom $f''(x)$ og krumningen på grafen til f.

Når $f''(x) < 0$, vender grafen den hule siden ned.

Når $f''(x) > 0$, vender grafen den hule siden opp. (2)

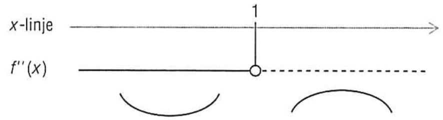
Eksempel 4

Vi vil bestemme krumningen på grafen til $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x + 1$.
Vi deriverer og får

$$f'(x) = -3x^2 + 6x - 1$$

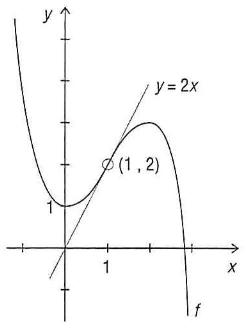
$$f''(x) = -6x + 6$$

Vi tegner fortegnsskjema for $f''(x)$.
Under fortegnsskjemaet antyder vi hvilken vei grafen krummer.



Figur 4.27

Grafen til f vender den hule siden opp i intervallet $\langle \leftarrow, 1 \rangle$ og den hule siden ned i intervallet $\langle 1, \rightarrow \rangle$.



Figur 4.28

4.29, 4.30

Vendepunkt

I punktet (1 , 2) på figur 4.28 går grafen over fra å vende den hule siden opp til å vende den hule siden ned. Vi sier at (1 , 2) er et *vendepunkt* på grafen.
Tangenten i et vendepunkt kaller vi en *vendetangent*.

Dersom $f''(x)$ skifter fortegn for $x = a$, er $(a\ ,f(a))$ et vendepunkt på grafen til f.

Fortegnslinja til $f''(x)$ i eksempel 4 viser at til venstre for $x = 1$ øker $f'(x)$ når x øker. Til høyre for $x = 1$ blir $f'(x)$ mindre når x øker.
$f'(x)$ er derfor størst i vendepunktet.
NB! Dette betyr at $f(x)$ vokser raskest i vendepunktet.

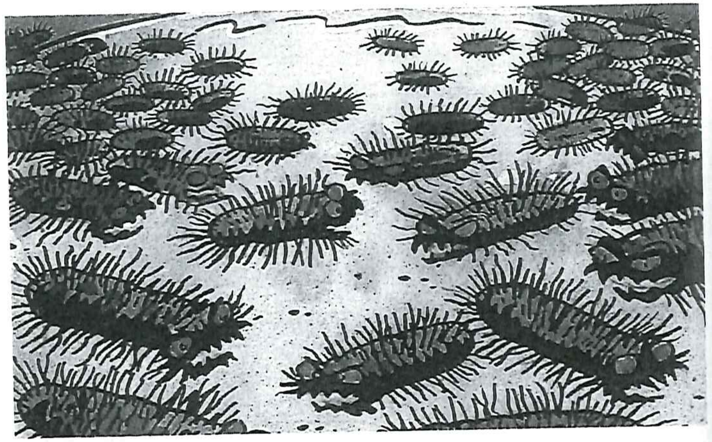
Når $f''(x) = 0$ i et punkt, vil dette punktet vanligvis være et vendepunkt. Men slik er det ikke alltid. Det avgjørende er om $f''(x)$ skifter fortegn i dette punktet.

Eksempel 5

Antall bakterier i en bakteriekultur er tilnærmet gitt ved

$$N(t) = -10t^3 + 120t^2 + 700t + 1000 \qquad t \in [0\,,\,10]$$

der t er antall døgn regnet fra et bestemt tidspunkt.
Ved dette tidspunktet er antall bakterier lik $N(0) = 1000$.



Vi deriverer $N(t)$ og får

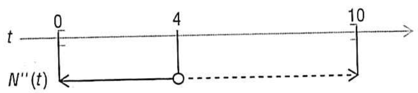
$$N'(t) = -30t^2 + 240t + 700$$

Vi vet at den deriverte forteller hvor raskt bakterietallet endrer seg. Ved begynnelsen av den perioden modellen gjelder for, er $N'(0) = 700$. Ved dette tidspunktet øker altså bakterietallet med en fart som svarer til 700 bakterier per døgn. Da er *vekstfarten* 700 bakterier per døgn.

Etter ett døgn er den deriverte $N'(1)$ lik 910. Da er vekstfarten 910 bakterier per døgn. Vekstfarten har økt i løpet av det første døgnet.

Vi vil nå finne når bakterietallet vokser raskest. Det vokser raskest når $N'(t)$ er størst. Vi må da derivere $N'(t)$.

$$N''(t) = -60t + 240$$

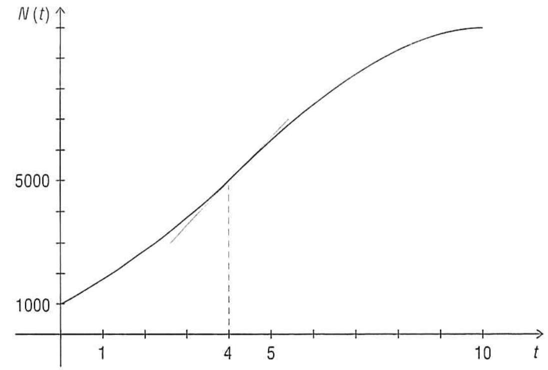


Figur 4.29

Fortegnslinja for $N''(t)$ viser at $N'(t)$ vokser i intervallet $\langle 0\,,4\rangle$ og minker i $\langle 4\,,10\rangle$.
$N'(t)$ må derfor være størst når $t = 4$.

$$N'(4) = -30 \cdot 4^2 + 240 \cdot 4 + 700 = 1180$$

Bakteriekulturen vokser altså raskest etter 4 døgn. Ved dette tidspunktet er vekstfarten ca. 1200 bakterier per døgn.



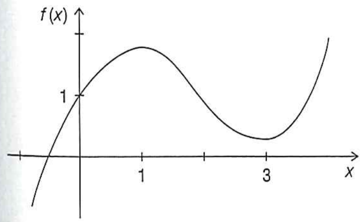
Figur 4.30

Kommentar
I intervallet $\langle 0\,,\,4\rangle$ er både $N'(t)$ og $N''(t)$ positiv. I dette intervallet er vekstfarten positiv, og den øker. Det vil si at antall bakterier øker stadig raskere.
I intervallet $\langle 4\,,\,10\rangle$ er $N'(t)$ fortsatt positiv, mens $N''(t)$ er negativ.
I dette intervallet er vekstfarten fortsatt positiv, men den minker. Det vil si at antall bakterier øker stadig langsommere.
Dette kan vi oppsummere slik.

- $N'(t)$ viser veksten
- $N''(t)$ viser hvordan veksten forandrer seg

OPPGAVER

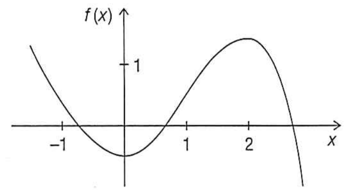
4.28
Nedenfor har vi tegnet grafen til en funksjon f.
Tegn fortegnslinje for $f(x)$, $f'(x)$ og $f''(x)$.



4.29
Bestem de intervallene der grafen til f vender den hule siden opp eller ned når

a $f(x) = x^3 - 3x^2$
b $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$
c $f(x) = \dfrac{1}{12}x^4 - 2x^2 + \dfrac{1}{4}x$

4.30
På figuren har vi tegnet grafen til en funksjon f.



a Finn av figuren de intervallene der f vokser og der f minker.
b Bestem også de intervallene der $f'(x)$ vokser og der $f'(x)$ minker.
c Tegn en fortegnslinje som viser hvordan fortegnet for $f''(x)$ varierer når x varierer.

4.31
Vekten (i kg) av en plante som vokser i en potte, er tilnærmet gitt ved

$V(t) = 0{,}0001t^3 - 0{,}0021t^2 + 0{,}05t + 1$

der t er antall uker regnet fra det tidspunkt da vekten var 1 kg. $t \in [0\,,\,10]$

a Bestem vendepunktet på grafen til $V(t)$ ved regning.
b Hva forteller svaret i oppgave a?
c Finn likningen for vendetangenten ved regning.

4.8 DEN DERIVERTE AV ET PRODUKT, EN BRØK OG SAMMENSATTE FUNKSJONER

Når vi skal derivere, får vi ofte bruk for regler for derivasjon av et produkt, en brøk og sammensatte funksjoner. Disse reglene kan vi bevise ved å bruke definisjonen av den deriverte, men i denne boka vil vi bare lære deg å bruke reglene.

Produktregelen

Når $u(x)$ og $v(x)$ er to funksjoner, har vi at

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \qquad (1)$$

For å lette oversikten har vi skrevet u i stedet for $u(x)$ og v i stedet for $v(x)$.
(Beviset kommer som oppgave i oppgavesamlingen.)

Eksempel 1

Vi skal derivere produktet $(2x^2 + 4)\sqrt{x}$.
Vi setter $u = 2x^2 + 4$ og $v = \sqrt{x}$.

I eksempel 3 side 132 viste vi at $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Vi får da

$$\left((2x^2+4)\sqrt{x}\right)' = (2x^2+4)' \cdot \sqrt{x} + (2x^2+4)\cdot(\sqrt{x})'$$

$$= 4x \cdot \sqrt{x} + (2x^2+4)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = 4x\sqrt{x} + \frac{x^2+2}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{4x\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{x^2+2}{\sqrt{x}} = \frac{4x\cdot x + x^2 + 2}{\sqrt{x}} = \frac{5x^2+2}{\sqrt{x}}$$

4.32

Brøkregelen

For to funksjoner $u(x)$ og $v(x)$ har vi denne regelen:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad (2)$$

Eksempel 2

Vi skal derivere $f(x) = \dfrac{x^2-3}{4x}$.

Her har vi

$u = x^2 - 3 \qquad u' = 2x$
$v = 4x \qquad v' = 4$

Av (2) får vi da

$$f'(x) = \frac{(x^2-3)'\cdot 4x - (x^2-3)\cdot(4x)'}{(4x)^2} = \frac{2x\cdot 4x - (x^2-3)\cdot 4}{(4x)^2}$$

$$= \frac{8x^2 - 4x^2 + 12}{16x^2} = \frac{4(x^2+3)}{16x^2} = \frac{x^2+3}{4x^2}$$

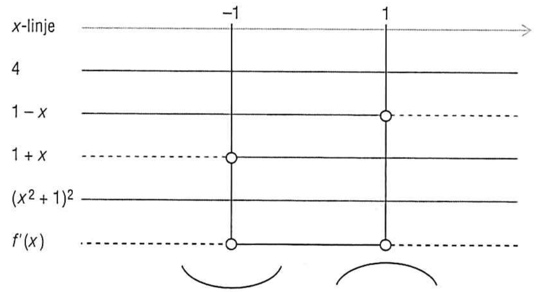
Eksempel 3

Vi vil finne eventuell topp- og bunnpunkter på grafen til funksjonen

$f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$.

$$f'(x) = \frac{(4x)'\cdot(x^2+1) - 4x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{4(x^2+1) - 4x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{4(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$



Figur 4.31

Av fortegnsskjemaet for $f'(x)$ ser vi at grafen har et bunnpunkt for $x = -1$ og et toppunkt for $x = 1$.

Bunnpunkt: $(-1\,, f(-1)) = (-1\,, -2)$
Toppunkt: $(1\,, f(1)) = (1\,, 2)$

4.33 – 4.35 Kontroller ved å tegne grafen på lommeregneren.

Sammensatte funksjoner

Vi tar for oss funksjonen

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x} \qquad (3)$$

For å derivere denne funksjonen må vi lære en ny derivasjonsregel. Men først lønner det seg å bli fortrolig med noen viktige begreper. Når vi regner ut verdier for $f(x)$, må vi først regne ut andregradsuttrykket $x^2 - 5x$. Deretter trekker vi ut kvadratroten. Vi sier derfor at f er *sammensatt* av kvadratrotfunksjonen og andregradsfunksjonen $x^2 - 5x$.

- Kvadratrotfunksjonen kalles den *ytre funksjonen* i den *sammensatte funksjonen.*
- Andregradsfunksjonen $x^2 - 5x$ kalles *kjernen.*

For kjernen i en sammensatt funksjon vil vi bruke den faste betegnelsen u. I dette tilfellet er altså u lik $x^2 - 5x$. Da får vi

$$f(x) = \sqrt{u} \qquad \text{der } u = x^2 - 5x \qquad (4)$$

Egentlig burde vi ha skrevet $u(x)$ i stedet for u. Men det er mer praktisk å skrive bare u.

I (4) er $\sqrt{u}$ funksjonsuttrykket for den ytre funksjonen.

Det er først og fremst ved derivasjon at det lønner seg å se på en funksjon som en sammensatt funksjon. Det gjør oss i stand til å derivere langt flere funksjoner enn hittil. Men da må vi velge kjernen slik at vi er i stand til å derivere kjernen og den ytre funksjonen hver for seg.

Eksempel 4

Her er flere eksempler på funksjoner som vi kan se på som sammensatte.

$$f(x) = (3x+5)^2 = u^2 \qquad \text{der } u = 3x+5$$

$$g(x) = \sqrt{3x+5} = \sqrt{u} \qquad \text{der } u = 3x+5$$

$$h(x) = \frac{1}{(2x+1)^2} = \frac{1}{u^2} \qquad \text{der } u = 2x+1$$

Kjerneregelen

Vi skal nå se hvordan vi kan derivere sammensatte funksjoner. Den regelen vi skal bruke, kalles *kjerneregelen.*
Som eksempel skal vi derivere funksjonen (3).

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$$

$$f(x) = \sqrt{u} \qquad \text{der } u = x^2 - 5x$$

- Først deriverer vi $\sqrt{u}$ med hensyn på u. Da får vi $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$.
- Så deriverer vi u med hensyn på x. $\quad u' = 2x - 5$
- Vi får $f'(x)$ ved å multiplisere $(\sqrt{u})'$ med u':

$$f'(x) = (\sqrt{u})' \cdot u' \qquad (5)$$

Her skal $\sqrt{u}$ deriveres med hensyn på u, og u skal deriveres med hensyn på x.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{x^2-5x}} \cdot (2x-5) = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x}}$$

Kjerneregelen er egentlig uttrykt i (5) ovenfor.
For å gi regelen en generell form skriver vi $g(u)$ i stedet for $\sqrt{u}$.
$(\sqrt{u})'$ blir da $g'(u)$.

Kjerneregelen
Vi lar f og g være to funksjoner slik at
$f(x) = g(u)$ der u er en funksjon av x

Den deriverte av f med hensyn på x er da gitt ved
$f'(x) = g'(u) \cdot u'$

I ord kan regelen skrives slik:

Når vi deriverer en sammensatt funksjon, deriverer vi først den ytre funksjonen med hensyn på kjernen. Så multipliserer vi med den deriverte av kjernen.

$g'(u)$ viser hvor fort $g(u)$ vokser i forhold til u.
u' forteller hvor fort u vokser i forhold til x.
$g'(u) \cdot u'$ viser derfor hvor fort $g(u)$, og dermed $f(x)$, vokser i forhold til x.

Eksempel 5

Vi skal derivere $f(x) = (x - x^2)^4$.
Vi velger $x - x^2$ som kjerne og får

$$f(x) = u^4 \qquad \text{der } u = x - x^2 \qquad u' = 1 - 2x$$

Av kjerneregelen får vi

4.36 a,b $\quad f'(x) = 4u^3 \cdot u' = 4(x - x^2)^3 \cdot (1 - 2x)$

Eksempel 6

Vi skal derivere $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$.
Vi velger $u = x^2 + 2x$ som kjerne.

$$f(x) = \sqrt{u} \qquad \text{der } u = x^2 + 2x \qquad u' = 2x + 2$$

$$f'(x) = (\sqrt{u})' \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x}} \cdot (2x+2) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$$

Eksempel 7

I grunnkurset tok vi for oss funksjonen $S(h) = \sqrt{2R \cdot h}$. Funksjonen forteller hvor langt ut over havet man kan se fra høyden h m over havet. R er jordas radius, som er $6{,}38 \cdot 10^6$ m.

Vi vil finne $S'(h)$ og deretter regne ut $S'(30)$.

$$S(h) = \sqrt{u} \qquad \text{der } u = 2R \cdot h \qquad u' = 2R$$

$$S'(h) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{2R \cdot h}} \cdot 2R = \frac{R}{\sqrt{2R \cdot h}}$$

$$S'(30) = \frac{R}{\sqrt{2R \cdot 30}} = \frac{6{,}38 \cdot 10^6}{\sqrt{60 \cdot 6{,}38 \cdot 10^6}} = 326{,}1$$

4.36 c,d Når vi er 30 m over havet, vil vi se ca. 326 m lenger for hver meter høyere opp vi kommer.

Eksempel 8

En dyreart blir satt ut i et avgrenset område. Vi regner med at antall dyr etter x år er tilnærmet gitt ved $f(x) = 2000 \cdot \dfrac{x^2+1}{x^2+30}$.

Vi vil finne ved regning når tallet på dyr vokser fortest. Vi skal altså finne når $f'(x)$ er størst. Og det finner vi ved å drøfte fortegnet til $f''(x)$.

$$f'(x) = 2000 \cdot \frac{2x \cdot (x^2+30) - (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+30)^2} = 2000 \cdot \frac{58x}{(x^2+30)^2} = 116\,000 \cdot \frac{x}{(x^2+30)^2}$$

For å finne $f''(x)$ må vi bruke derivasjonsregelen for brøk på nytt. Dessuten må vi bruke kjerneregelen for å derivere nevneren. Det er en fordel å derivere nevneren før vi deriverer selve brøken.
Vi setter $n(x)$ for nevneren og velger $u = x^2 + 30$ som kjerne.
Da får vi

$$n(x) = u^2 \qquad \text{der } u = x^2 + 30 \qquad u' = 2x$$

Den deriverte av nevneren blir da

$$n'(x) = (u^2)' \cdot u' = 2u \cdot u' = 2 \cdot (x^2+30) \cdot 2x = 4x(x^2+30)$$

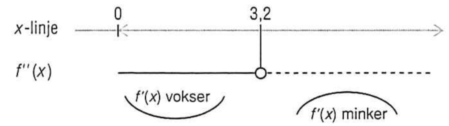
Så deriverer vi brøken.

$$f''(x) = 116\,000 \cdot \frac{1 \cdot (x^2+30)^2 - x \cdot 4x(x^2+30)}{(x^2+30)^4} = 116\,000 \cdot \frac{(x^2+30)^2 - 4x^2(x^2+30)}{(x^2+30)^4}$$

$$= 116\,000 \cdot \frac{(x^2+30) \cdot (x^2+30-4x^2)}{(x^2+30)^4}$$

$$= 116\,000 \cdot \frac{30-3x^2}{(x^2+30)^3}$$

Vi setter opp fortegnsskjema for $f''(x)$.



Figur 4.32

$f''(x) = 0$
$30 - 3x^2 = 0$
$x^2 = 10$
$x = 3{,}2 \qquad x > 0$

Av fortegnsskjemaet ser vi at $f'(x)$ er størst når $x = 3{,}2$. Antall dyr øker altså raskest etter ca. 3 år.
Tegn grafen til $f(x)$. Hva kan du si om grafen når $x = 3{,}2$?
Hva kan du si om grafen til $f'(x)$ når $x = 3{,}2$? For å kontrollere at du har svart riktig på dette, kan du tegne grafen til $f'(x)$ på lommeregneren.

Grafen til den deriverte og den andrederiverte på lommeregneren

Du skal nå lære å tegne grafen til den deriverte og den andrederiverte uten å derivere.

CASIO

Du må være i grafmenyen.
Skriv funksjonsuttrykket ut for Y1= . Trykk [EXE] . Du er nå i feltet for Y2.
Trykk [OPTN] [F2] (CALC) [F1] (d/dx) [VARS] [F4] (GRPH) [F1] (Y)
[1] [.] [X] [)]
På skjermen skal det nå stå Y2 = d/dx (Y1, X).
Hvis du bare vil tegne grafen til $f'(x)$, må du deaktivere funksjonen $f(x)$ før du trykker [F6] (DRAW).
For å tegne grafen til den andrederiverte, går du til feltet for Y3.
Trykk [OPTN] [F2] (CALC) [F2] (d²/dx²) [VARS] [F4] (GRPH) [F1] (Y)
[1] [.] [X] [)]
På skjermen skal det nå stå Y3 = d²/dx² (Y1, X).
Trykk [F6] (DRAW).

TEXAS

Trykk [Y=]. Skriv funksjonsuttrykket ut for Y1= . Trykk [ENTER]. Du er nå i feltet for Y2.

Trykk [MATH] [8] (nDeriv( ) [VARS] ▶(Y-VARS) [1] (Function) [1] (Y1) [,] [X] [,] [X] [)]

På skjermen skal det nå stå Y2 = n Deriv (Y1, X, X).

Hvis du bare vil tegne grafen til $f'(x)$, må du deaktivere funksjonen $f(x)$ før du trykker [GRAPH].

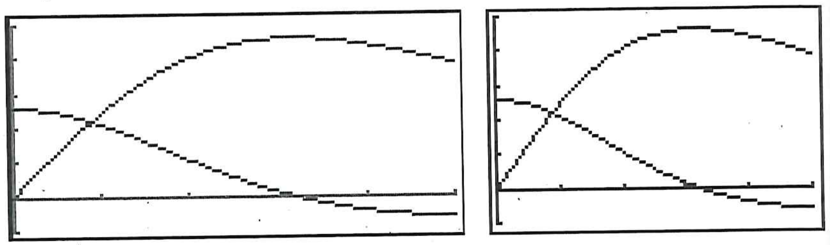
For å tegne grafen til den andrederiverte, går du til feltet for Y3.

Trykk [MATH] [8] (nDeriv( ) [VARS] ▶(Y-VARS) [1] (Function) [2] (Y2) [,] [X] [,] [X] [)]

På skjermen skal det nå stå Y3 = n Deriv (Y2, X, X).

Trykk [GRAPH].

Eksempel 9



Figur 4.33

Figuren viser grafene til $f'(x)$ og $f''(x)$ for funksjonen $f(x)$ i eksempel 8. Vi har brukt Xmin = 0, Xmax = 5 og Xscale = 1.

Stemmer grafene med fortegnsskjemaet på figur 4.32 og det du kom fram til om grafen til $f''(x)$ for $x = 3{,}2$?

OPPGAVER

4.32

Bruk regelen for derivasjon av et produkt til å finne $f'(x)$ når

a $f(x) = x \cdot (2x + 3)$
b $f(x) = x^2 \cdot (3x - 4)$
c $f(x) = (x^2 + 1) \cdot (3 - x^2)$
d $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$

4.33

Finn $f'(x)$ når

a $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x+1}$ b $f(x) = \dfrac{2x-4}{x}$

c $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$ d $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

4.34

Bruk regelen for derivasjon av en brøk til å finne $f'(x)$ når

a $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

b $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$

c $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Finn også $f'(x)$ ved å omforme $f(x)$ til en potens med x som grunntall, og så bruke derivasjonsregelen for x^r.

4.35

På grunnkurset viste vi i et eksempel at energien som en syklist bruker per meter når hun sykler på flat vei, kan være tilnærmet gitt ved

$$E(v) = \frac{5 \cdot 0{,}14v^3 + 90}{v}$$

der v er farten i m/s. Enheten for $E(v)$ er J/m. Finn ved regning hvilken fart hun må sykle med for at energiforbruket skal være minst mulig.

4.36

Deriver funksjonene

a $f(x) = (2x + 1)^5$
b $g(x) = (3x^4 + 2x^2 + 3)^4$
c $h(x) = \sqrt{3x+1}$
d $i(x) = \sqrt{4-x^2}$

4.37

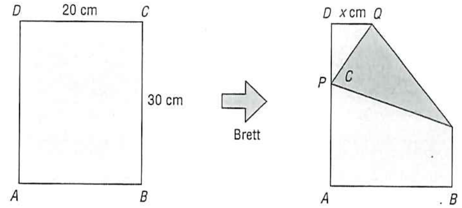
Deriver funksjonene

a $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^4$ b $g(x) = x \cdot \sqrt{1+x^2}$

c $h(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^4}$ d $i(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

▲ 4.38

Vi bretter et A4-ark slik figuren viser:



Hjørnet C faller sammen med punktet P på siden AD.

a Vis at $DP = \sqrt{400 - 40x}$. Forklar at arealet til trekanten PQD er gitt ved $A(x) = x\sqrt{100 - 10x}$.
b Finn x slik at arealet av trekanten blir størst mulig.
c Bestem de eksakte verdiene av sidene i trekanten. Kan du si noe mer om denne trekanten? (Kommenter.)

4.39

En kommuneplanlegger antar at folketallet i kommunen t år etter 1. januar 2000 vil være

$$f(t) = 12\,500 + \frac{6000t}{10+t^2} \qquad t \le 15$$

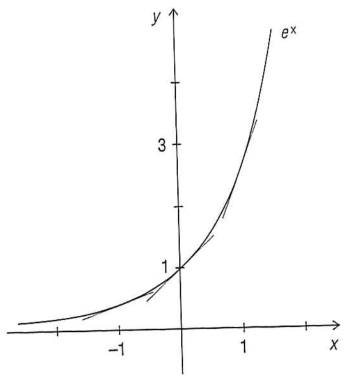
a Finn $f'(2)$ og $f'(6)$ ved regning. Hva forteller svarene?
b Sett opp fortegnsskjema for $f'(t)$. Hva sier dette om folketallet?
c Sett opp fortegnsskjema for $f''(t)$. Hva sier dette om folketallet?

4.9 DEN DERIVERTE AV e^x OG $\ln x$

$(e^x)' = e^x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Nedenfor har vi tegnet grafen til e^x. Dessuten har vi tegnet inn noen tangenter til grafen.



Figur 4.34

Vi ser at stigningstallet til tangenten hele tiden er positivt, og det blir større etter hvert som x vokser.
$(e^x)'$ må derfor alltid være positiv og øke når x vokser.
Finn $(e^x)'$ for noen x-verdier ved å bruke lommeregneren.
Hva er for eksempel $(e^x)'$ for $x = -1$, $x = 0$ og $x = 1$?
Kjenner du en funksjon som har de egenskapene vi har nevnt ovenfor?
Tegn grafen til e^x og $(e^x)'$ i samme bilde på lommeregneren. Hva ser du?

o Vi vil bruke definisjonen på den deriverte til å finne $(e^x)'$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

På side 123 så vi at

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Bytter vi ut x med Δx, får vi

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1 \qquad (1)$$

Når Δx går mot null, går altså $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ mot $e^x \cdot 1 = e^x$.

Altså har vi at

$$(e^x)' = e^x$$

Eksempel 1

Vi vil derivere funksjonen $f(x) = e^{4x}$.

$f(x) = e^u \qquad \text{der } u = 4x$

$f'(x) = (e^u)' \cdot u' = e^u \cdot 4 = 4e^{4x}$

Eksempel 2

Vi vil derivere funksjonen $f(x) = e^{-x}$.

$f(x) = e^u \qquad \text{der } u = -x$

$f'(x) = (e^u)' \cdot u' = e^u \cdot (-1) = -e^{-x}$

Resultatene i eksempel 1 og 2 setter oss på sporet av en generell regel som vi kommer til å bruke ofte:

$$(e^{kx})' = k \cdot e^{kx} \qquad (2)$$

4.40 a – d

I eksempel 1 var $k = 4$. I eksempel 2 var $k = -1$.

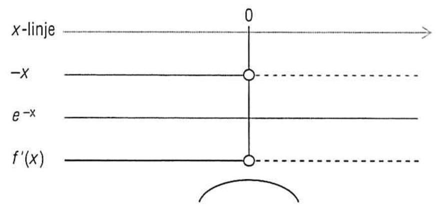
Eksempel 3

Vi vil finne eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til funksjonen

$f(x) = (x + 1)e^{-x}$

$f'(x) = (x + 1)' \cdot e^{-x} + (x + 1) \cdot (e^{-x})'$

$\quad = 1 \cdot e^{-x} + (x + 1) \cdot (-1 \cdot e^{-x}) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} - e^{-x} = -xe^{-x}$



Figur 4.35

Grafen har toppunkt for $x = 0$.
Toppunkt: $(0, f(0)) = (0, 1)$.
Tegn grafen på lommeregneren.

4.40 e, f, 4.41

Eksempel 4

I begynnelsen av en influensaepidemi økte antall smittede etter modellen

$g(t) = 500 \cdot 1{,}17^t$ der t er tiden målt i døgn.

Vi vil regne ut $g'(4)$.
Når vi skal finne den deriverte av $1{,}17^t$, skriver vi 1,17 som en potens av e.

$$g(t) = 500 \cdot 1{,}17^t = 500 \cdot (e^{\ln 1{,}17})^t = 500 \cdot e^{\ln 1{,}17 \cdot t} = 500 \cdot e^{0{,}157t}$$

Vi bruker (2) ovenfor og får

$$g'(t) = 500 \cdot 0{,}157e^{0{,}157t} = 78{,}5 \cdot e^{0{,}157t}$$

$$g'(4) = 78{,}5 \cdot e^{0{,}157 \cdot 4} = 147{,}1$$

Svaret forteller at etter 4 døgn økte antall smittede med ca. 150 per døgn.

Den deriverte av a^x

I eksempel 4 skrev vi grunntallet 1,17 som en potens av e.
Tilsvarende kan vi også gjøre når vi skal finne den deriverte av a^x.

$$f(x) = a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$$

Vi bruker kjerneregelen:

$$f(x) = a^x = e^u \quad \text{der} \quad u = x \ln a \quad \text{og} \quad u' = \ln a$$

$$f'(x) = (e^u)' \cdot u' = e^u \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \qquad (3)$$

Eksempel 5

Vi vil bruke (3) til å derivere funksjonen $g(t)$ i eksempel 4.

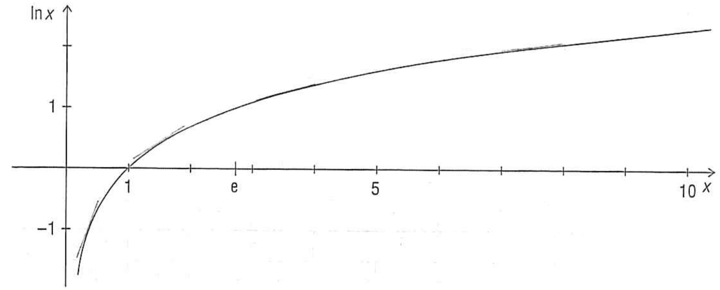
$$g(t) = 500 \cdot 1{,}17^t$$

$$g'(t) = 500 \cdot 1{,}17^t \cdot \ln 1{,}17 = 78{,}5 \cdot 1{,}17^t$$

4.42 $g'(4) = 78{,}5 \cdot 1{,}17^4 = 147{,}1$

Den deriverte av $\ln x$

Nedenfor har vi tegnet grafen til $\ln x$. Dessuten har vi tegnet inn noen tangenter til grafen.



Figur 4.36

Vi ser at stigningstallet til tangenten blir mindre etter hvert som x øker, men det er hele tiden positivt. $(\ln x)'$ må derfor minke når x øker, men må alltid være positiv.

Når vi skal utlede den deriverte av $\ln x$, kan vi benytte oss av at vi kjenner den deriverte av e^x.
Vi setter $\ln x = u$. Da vet vi at

$$x = e^u$$

NB! Da venstresiden er lik høyresiden for alle verdier av x, må den deriverte av venstresiden med hensyn på x være lik den deriverte av høyresiden med hensyn på x.

For å derivere e^u med hensyn på x må vi bruke kjerneregelen med u som kjerne.
Da får vi

$$1 = e^u \cdot u'$$

$$\frac{1}{e^u} = u'$$

$$\frac{1}{x} = u'$$

Siden $u = \ln x$, får vi at

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (4)$$

Vi ser av (4) at $(\ln x)' > 0$ for alle $x > 0$. Det viser at $\ln x$ vokser i hele definisjonsmengden.

Eksempel 6

Vi vil derivere $f(x) = \ln 2x$ ved å bruke kjerneregelen med $2x$ som kjerne.

$$f(x) = \ln u \qquad \text{der } u = 2x$$
$$f'(x) = (\ln u)' \cdot u' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x}$$

Alternativ måte:
Vi kan omforme $f(x)$.

$$f(x) = \ln 2x = \ln 2 + \ln x$$
$$f'(x) = (\ln 2)' + (\ln x)' = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

Eksempel 7

Vi vil derivere $g(x) = (\ln x)^2$.

$$g(x) = u^2 \qquad \text{der } u = \ln x$$
$$g'(x) = (u^2)' \cdot u' = 2u \cdot u' = (2\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$$

Alternativ måte:

$$g(x) = (\ln x)^2 = (\ln x) \cdot (\ln x)$$

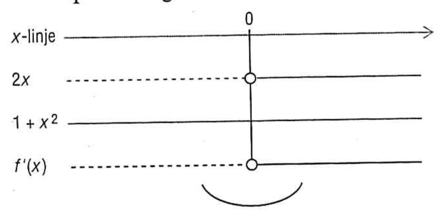
4.43a, b Bruk produktregelen og vis at du får samme svar som ovenfor.

Eksempel 8

Vi vil finne eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til funksjonen

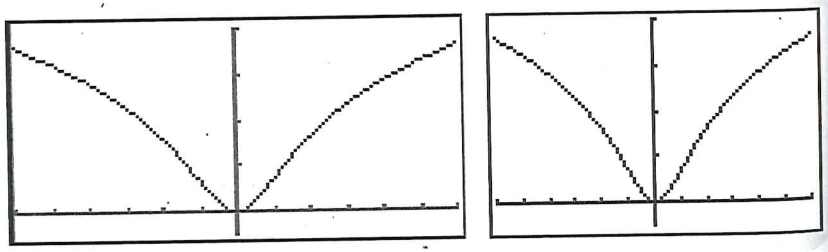
$$f(x) = \ln(1 + x^2).$$
$$f(x) = \ln u \qquad \text{der } u = 1 + x^2$$
$$f'(x) = (\ln u)' \cdot u' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{2x}{1+x^2}$$

NB! Her kan du ikke bruke en alternativ måte til å finne $f'(x)$, slik vi gjorde i eksemplene 6 og 7. Hvorfor?



Figur 4.37

Av fortegnsskjemaet ser vi at grafen har et bunnpunkt for $x = 0$.
Bunnpunkt: $(0, f(0)) = (0, \ln 1) = (0, 0)$
Grafen har ingen toppunkter.



Figur 4.38

Eksempel 9

I dette eksemplet skal vi utlede den deriverte av x^r for $x > 0$.

$$f(x) = x^r = (e^{\ln x})^r = e^{r \cdot \ln x} = e^u$$
$$f(x) = e^u \qquad \text{der } u = r \cdot \ln x \text{ og } u' = r \cdot \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = (e^u)' \cdot u' = e^u \cdot r \cdot \frac{1}{x} = x^r \cdot r \cdot \frac{1}{x} = r \cdot \frac{x^r}{x} = r \cdot x^{r-1}$$

OPPGAVER

4.40
Deriver $f(x)$ og drøft fortegnet for $f'(x)$.
a $f(x) = e^{2x}$
b $f(x) = e^{2x^2-3x}$
c $f(x) = 5e^{-x^2}$
d $f(x) = e^{2x} - 8e^x$
e $f(x) = x \cdot e^{-x}$
f $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1-e^{2x}}$

4.41
Gitt funksjonen $f(x) = e^{2x} - 2e^x$.
a Bestem eventuelle nullpunkter for f.
b Bruk $f'(x)$ til å bestemme eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen.
c Bruk $f''(x)$ til å bestemme vendepunktet på grafen. Hva kan du si om $f'(x)$ i vendepunktet?
d Tegn grafen til $f(x)$ og $f'(x)$ på lommeregneren. Kommenter.

4.42
a Deriver $f(x)$ og drøft fortegnet til $f'(x)$.
1 $f(x) = 1000 \cdot 1{,}20^x$
2 $f(x) = 3000 \cdot 0{,}88^x$
b En beholder fylles med gass fra en ledning. t minutter etter at påfyllingen startet, strømmer det $M(t)$ kg gass per minutt gjennom ledningen, der

$$M(t) = 200 \cdot 0{,}88^{\frac{t}{60}}$$

Regn ut $M'(60)$ og $M'(180)$.
Hva forteller svarene?

4.43
Deriver $f(x)$ og drøft fortegnet til $f'(x)$.
a $f(x) = \ln 3x$
b $f(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x$
c $f(x) = \ln(x^2 + 2x)$
d $f(x) = \ln(4 - x^2)$
e $f(x) = x \cdot \ln x$
f $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

4.44
Gitt funksjonen $f(x) = (\ln x)^2 - 4$.
a Bestem eventuelle nullpunkter for $f(x)$.
b Finn $f'(x)$ og bestem eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen.
c Undersøk om grafen til $f(x)$ har vendepunkt.
d Tegn grafene til $f(x)$ og $f'(x)$ på lommeregneren. Kommenter.

4.45
Bruk kjerneregelen til å vise at

$$(e^{kx})' = ke^{kx}$$

SAMLEOPPGAVER

4.A
Bruk definisjonen på den deriverte til å finne
a $f'(x)$ når $f(x) = 3x - 4$
b $f'(x)$ når $f(x) = x^2$
c $f'(x)$ når $f(x) = 3x^2$

4.B
Vi fyller vann i en beholder. t minutter etter at påfyllingen startet, er vannhøyden $h(t)$ cm gitt ved $h(t) = \frac{t^2}{4}$.
a Tegn grafen til $h(t)$ for $0 \le t \le 6$.
b Finn $h'(t)$.
c Regn ut $h'(3)$ og $h'(5)$. Tolk svarene.

4.C
Finn $f'(x)$. Sett opp fortegnsskjema for $f'(x)$ og bestem hvor grafen synker, og hvor den stiger. Bestem eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen. Tegn grafen.
a $f(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 3$
b $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$

4.D
Da Sadia kastet ball i oppgave 1G, var høyden til ballen gitt ved
$f(x) = -0{,}01x^2 + 0{,}3x + 2{,}20$
der x meter er den horisontale avstanden.
a Finn $f'(x)$.
b Finn den største høyden.

4.E
Totalkostnaden i kroner ved en vareproduksjon er gitt ved
$K(x) = 0{,}02x^2 + 30x + 4000,\ x \in \langle 200, 800 \rangle$
der x er antall enheter.
Inntekten ved salg er gitt ved
$I(x) = 150x - 0{,}08x^2, \quad x \in \langle 200, 800 \rangle$
a Regn ut $K'(500)$ og $I'(500)$.
Hva forteller svarene?
b Regn ut $K'(700)$ og $I'(700)$.
Hva forteller svarene?
c Kan du trekke noen konklusjon av svarene i oppgavene a og b?
d Bruk $K'(x)$ og $I'(x)$ til å finne hvor mange enheter som må produseres for at overskuddet skal bli størst mulig.
e Finn et uttrykk for overskuddet $O(x)$ kr.
Bruk dette til å finne størst overskudd
1 grafisk på lommeregneren
2 ved regning

4.F
En funksjon er gitt ved $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2$.
a Finn $f'(x)$ og $f''(x)$.
b Bestem de intervallene der grafen vender den hule siden opp eller ned. Bestem vendepunktet ved regning.
c For hvilken verdi av x minker funksjonen raskest? Hva kan du si om $f'(x)$ og grafen til $f(x)$ for denne x-verdien?
d Finn likningen for vendetangenten.
e Tegn grafen til $f(x)$.

4.G
Inntekten i tusen kroner fra salget av en vare er gitt ved

$$I(p) = \frac{500p}{p^2 + 900} \qquad 25 < p < 40$$

Finn $I'(p)$. Bestem den prisen som gir størst inntekt. Hvor stor er inntekten da?

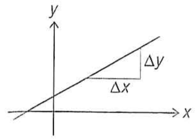
4.H
Deriver funksjonene
a $f(x) = e^{5x}$ b $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$
c $f(x) = (x^2 - 4) \ln (x^2 - 4)$

4.I
Gitt funksjonen $f(x) = (2 - x)e^x$.
a Finn eventuelle nullpunkter, topp- og bunnpunkter ved regning.
b Finn ved regning den verdien av x der $f'(x)$ er størst. Hva kan du si om funksjonen for denne x-verdien?
c Finn likningen for vendetangenten.
d Tegn grafen til $f(x)$.

4.J
I en prøve med det radioaktive stoffet polonium er poloniummengden fra starten av 100 milligram. Etter t minutter er mengden gitt ved $m(t) = 100 \cdot 0{,}794^t$.
a Regn ut $m(3)$ og $m(9)$. Hva forteller svarene?
b Regn ut $m'(3)$ og $m'(9)$.
Hva forteller svarene?
c Løs likningen $m(t) = 50$ ved regning.
Kommenter.

SAMMENDRAG

Stigningstall



Stigningstallet for linja er $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

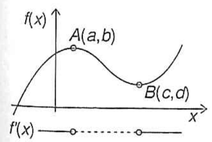
Kontinuitet
Når grafen er sammenhengende, er f kontinuerlig.

Den deriverte
- Den deriverte til en funksjon i et punkt på grafen er stigningstallet til tangenten.
- $f'(x)$ er grenseverdien for $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ når Δx går mot null.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Derivasjonsregler
- $(u + v)' = u' + v'$
- $(u - v)' = u' - v'$
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
- $(x^r)' = rx^{r-1}$
- $f(x) = g(u)$
  $f'(x) = g'(u) \cdot u'$
- $(e^x)' = e^x$
- $(e^{kx})' = ke^{kx}$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

Førstederivert



$f'(x) > 0$:
$f(x)$ vokser
grafen stiger mot høyre

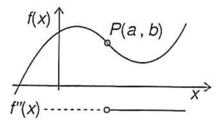
$f'(x) < 0$:
$f(x)$ minker
grafen synker mot høyre

$A(a, b)$ er et toppunkt
$B(c, d)$ er et bunnpunkt

b er en maksimalverdi
d er en minimalverdi
b og d er ekstremalverdier

Likningen for en tangent
$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$
$f'(x_1)$ er stigningstallet
(x_1, y_1) er tangeringspunktet

Andrederivert



$f''(x) > 0$:
$f'(x)$ vokser
grafen vender den hule siden opp

$f''(x) < 0$:
$f'(x)$ minker
grafen vender den hule siden ned

$f''(x)$ skifter fortegn for $x = a$
$P(a, b)$ er et vendepunkt

Tangenten i vendepunktet
$y - b = f'(a)(x - a)$

Noen praktiske begreper
Totalkostnad: $K(x)$
Grensekostnad: $K'(x)$
Inntekt: $I(x)$
Grenseinntekt: $I'(x)$
Avstandsfunksjonen: $s(t)$
Fartsfunksjonen: $v(t) = s'(t)$
Akselerasjonsfunksjonen: $a(t) = v'(t) = s''(t)$