2 EKSPONENTIALFUNKSJONER OG LOGARITMER

HOVEDMOMENT
4c–e

Som sandkornene på stranden…

Tallteorien, eller læren om de hele tallene, er full av uløste mysterier.
Se på primtallene – de hele tallene som bare kan deles med én og seg selv:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 og 97 er primtallene under hundre. Kaotisk?

Hvorfor er det bare ett partall blant primtallene? Hvorfor finner vi *trillinger,* det vil si tre primtall «etter hverandre», bare ett sted, nemlig 3, 5 og 7? Hvorfor er primtallene sjeldnere og sjeldnere utover på tallinja?

Enda primtallene blir sjeldnere og sjeldnere, viste Euklid 300 f.Kr. at det finnes uendelig mange primtall. Uendelig ... ? Antall sandkorn på en strand er ikke en gang en dråpe i havet til sammenlikning.

Rundt 1800 fant den 14 år gamle Carl Friedrich Gauss ut at antall primtall mindre enn et gitt helt tall n så ut til å være omtrent $\frac{n}{\ln n}$.
Du har en ln-tast på lommeregneren, og du kan sjekke formelen for $n = 100$.

Atle Selberg, født i Langesund i 1917, fikk Fieldsmedaljen, matematikkens «Nobelpris», i 1950, blant annet for å ha funnet et «elementært» bevis for *primtallsteoremet.* Teoremet sier at forholdet mellom antall primtall under n og brøken $\frac{n}{\ln n}$ går mot 1 når n går mot uendelig.

ln henger sammen med tallet e. Du vil lære begge å kjenne i dette kapitlet, men mysteriet med primtallene blir nok bare dypere.

2.1 VI REGNER MED POTENSER

grunntall → a^n ← eksponent

I grunnkurset så du flere eksempler på eksponentiell vekst, og du lærte å løse eksponentiallikninger ved å bruke logaritmer. I dette kapitlet vil du lære mer om eksponentiell vekst og logaritmer. Men først repeterer vi potensregningen fra grunnkurset.

Vi begynner med tre grunnleggende definisjoner.

La n være et positivt helt tall og a et reelt tall forskjellig fra null. Da er

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ faktorer}} \qquad (1)$$

$$a^0 = 1 \qquad (2)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (3)$$

Eksempel 1

Definisjonene gir

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$70\,363\,456^0 = 1$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

Setninger om potenser

Av definisjonene (1)–(3) følger en rekke *setninger*. Setningene er logiske konsekvenser av definisjonene. Hvis du bare husker definisjonene, kan du finne fram til setningene på egen hånd.

La m og n være hele tall og a og b reelle tall forskjellig fra null.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (4)$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (5)$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n} \qquad (6)$$

$$(ab)^m = a^m b^m \qquad (7)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \qquad (8)$$

Vi kan bevise setningene (4)–(8) ved hjelp av definisjonene.
Når m og n er positive hele tall, kan for eksempel setning (4) bevises slik:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ faktorer}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ faktorer}}}_{m+n \text{ faktorer}} = a^{m+n}$$

Merk at setningene også gjelder når m eller n (eller begge) er negative hele tall.

Eksempel 2

Vi kan bruke setningene (4)–(8) til å regne ut eller forenkle potensuttrykk. Prøv selv å finne ut hvilke setninger som er brukt!

$$3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$$

$$\frac{5^5}{5^3} = 5^{5-3} = 5^2 = 25$$

$$\frac{10^4}{10^6} = 10^{4-6} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0{,}01$$

$$\left(3^2\right)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6$$

$$\left(2 \cdot 3^2\right)^3 = 2^3 \cdot 3^{2 \cdot 3} = 2^3 \cdot 3^6$$

2.1, 2.2

$$(2 \cdot 3)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot \frac{2^2}{3^2} = 2^{3+2} \cdot 3^{3-2} = 2^5 \cdot 3 = 96$$

Rasjonale og irrasjonale eksponenter

Hva nå hvis eksponenten ikke er et helt tall?

La oss først se på $9^{\frac{1}{2}}$. Hvis setning (4) skal være gyldig, må

$$9^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 9^1 = 9$$

Hvilket positivt tall er det som ganget med seg selv gir tallet 9?

Det er $\sqrt{9}$. Derfor passer det å si at $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9}$.

Hva kan så $9^{\frac{3}{2}}$ bety?

Hvis setning (6) skal gjelde her, må vi ha at $9^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{1}{2} \cdot 3} = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^3$.

Vi vedtar derfor at

$\sqrt{}$ er det samme som $\sqrt[2]{}$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad (9)$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \qquad (10)$$

Dette forutsetter at $a > 0$, og at n og m er hele tall hvor n er positiv.

Eksempel 3

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

$8 = 2^3$

$$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 8^{\frac{1}{3} \cdot 3} = 8^1 = 8$$

I (10) kan eksponenten $\frac{m}{n}$ være et hvilket som helst rasjonalt tall.
Vi har dermed definert a^x for alle rasjonale verdier av x, forutsatt at $a > 0$.

Men a^x er også definert når x er et irrasjonalt tall, for eksempel π. Definisjonen er slik at når vi opphøyer a i en (rasjonal) tilnærmingsverdi for π, får vi en tilnærmingsverdi for a^π.

Definisjonen (3) og setningene (4)–(8) gjelder for alle reelle eksponenter, forutsatt at grunntallet a er større enn null. Til sammen utgjør disse potensreglene en «potensmaskin» som vi kan bruke til å regne ut eller forenkle en rekke potensuttrykk.

Eksempel 4

Vi bruker potensreglene til å forenkle noen potensuttrykk.
Prøv selv å finne ut hvilke regler som er brukt!

$$\left(4^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(4^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(4^1\right)^2 = 4^{1 \cdot 2} = 16$$

$$\frac{x^{\frac{2}{3}} \cdot (xy)^{\frac{1}{2}}}{(xy)^{\frac{1}{6}} \cdot y^{\frac{1}{3}}} = \frac{x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{6}} \cdot y^{\frac{1}{6}} \cdot y^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} \cdot y^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{6}{6}} \cdot y^{\frac{0}{6}} = x \cdot 1 = x$$

$$\frac{x^{-5}}{x^{-2}} = x^{-5-(-2)} = x^{-3}$$

$$2^\pi \cdot 2^{2\pi} = 2^{\pi+2\pi} = 2^{3\pi}$$

TIPS

Er du usikker på en regel, bør du alltid teste den med kjente tall.
Husk at potensreglene (3)–(8) gjelder når eksponentene m og n er relle tall, men da må grunntallet a være positivt.

OPPGAVER

2.1

Skriv disse tallene som potenser på en enkel måte:

a $\dfrac{3^{12} \cdot 3^{-2}}{3^5}$ **b** $\dfrac{\left(2^4\right)^2 \cdot 2^{-6}}{2^{-8}}$

c $\dfrac{12^3 \cdot 4^{-3}}{3^{-1}}$ **d** $\dfrac{6^2 \cdot 18^3}{54^2 \cdot 8}$

2.2
Skriv så enkelt som mulig:

a $\dfrac{a^{-4}\cdot\left(a^2\right)^3}{\left(a^{-6}\right)^2\cdot\left(a^4\right)^{-1}}$ b $\dfrac{(2a)^3\cdot a^{-3}}{\left(a^{-1}\right)^4}$

c $\dfrac{2x^2\cdot 3y^4}{\left(x^{-2}\right)^2\cdot\left(y^2\right)^2}$ d $\dfrac{(2x^2y^{-1})^2}{(2x^{-1})^3(xy^{-2})^2}$

2.3
Skriv så enkelt som mulig uten å bruke lommeregner.

a $9^{\frac{1}{2}}$ b $49^{\frac{1}{2}}$ c $(25^3)^{\frac{1}{6}}$

d $64^{\frac{1}{3}}$ e $81^{-\frac{1}{4}}$ f $64^{-\frac{5}{6}}$

2.4
Skriv uttrykkene så enkle som mulig uten å bruke lommeregner.

a $3^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{2}}$ b $5^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{4}{3}}$

c $a^{\frac{2}{5}}\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{21}{10}}$ d $\dfrac{4^{\frac{5}{3}}}{4^{\frac{2}{3}}}$

e $\dfrac{3^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}}$ f $\dfrac{5^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{5}{3}}\cdot 5^{\frac{7}{6}}}{5^{\frac{5}{2}}}$

g $\dfrac{p^{\frac{3}{10}}\cdot p^{-\frac{3}{5}}}{p^{-\frac{4}{5}}}$

2.2 EKSEMPLER PÅ EKSPONENTIELL VEKST

$f(x) = C_0 \cdot a^x$

$f(0) = C_0 \cdot a^0 = C_0$

Dersom T er doblingstiden:
$f(T) = 2 \cdot C_0$

Dersom T er halveringstiden:
$f(T) = \frac{1}{2} \cdot C_0$

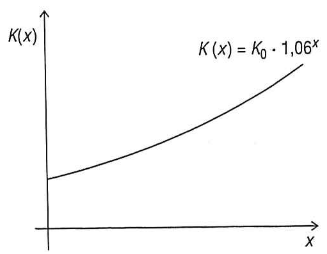
Vi finner eksponentiell vekst i populasjoner med mennesker eller dyr, i bakteriekolonier, hos virus, og når vi regner med rentesrente. Vi kan også finne eksponentiell vekst i eksplosjoner, i økningen av mulige signalveier i et nett av hjerneceller, og i økningen over tid av kontaktmulighetene på Internett.
Størrelser kan også *avta* eksponentielt. Verdien til den nye familiebilen, mengden karbon-14 i dødt organisk materiale og temperaturen til solbærtoddien på termosen under fjellturen er eksempler på størrelser som avtar eksponentielt.

Eksempel 1

Du setter inn K_0 kroner på en bankkonto i begynnelsen av et år. Renten er 6 %. Kapitalen (innskuddet) vokser med 6 % per år. Etter x år har du

$$K(x) = K_0\cdot\left(1+\frac{6}{100}\right)^x = K_0\cdot 1{,}06^x \qquad (1)$$

kroner på kontoen. Kapitalen etter x år er startkapitalen K_0 multiplisert med *vekstfaktoren* 1,06 opphøyd i x.



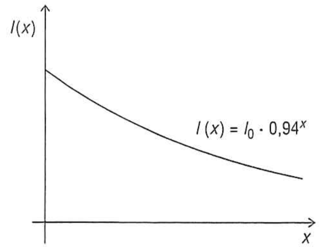
Figur 2.1

Eksempel 2

Når lys går gjennom glass, blir lyset svakere dess tykkere glasset er. Lys med intensitet I_0 treffer glasset, og lysintensiteten minker med 6 % per cm i glasset. Intensiteten blir da

$$I(x) = I_0\cdot\left(1-\frac{6}{100}\right)^x = I_0\cdot 0{,}94^x \qquad (2)$$

etter x cm gjennom glasset. Hva er vekstfaktoren i dette eksemplet?



Figur 2.2

Når en størrelse vokser eller minker med samme prosent flere ganger på rad, er det prosentvis eller eksponentiell vekst. Eksponentiell vekst kan være positiv (eksempel 1) eller negativ (eksempel 2).

NB!

Når noe øker med p %, er vekstfaktoren $1+\dfrac{p}{100}$.

2.5 Når noe minker med p %, er vekstfaktoren $1-\dfrac{p}{100}$.

Noen egenskaper for eksponentialfunksjoner

En funksjon for eksponentiell vekst, for eksempel $K(x) = K_0\cdot 1{,}06^x$, kalles en eksponentialfunksjon. 1,06 blir kalt *grunntallet* for funksjonen.

Funksjonene (1) og (2) er eksponentialfunksjoner.

For å se på noen egenskaper for eksponentialfunksjoner studerer vi to enkle funksjoner.

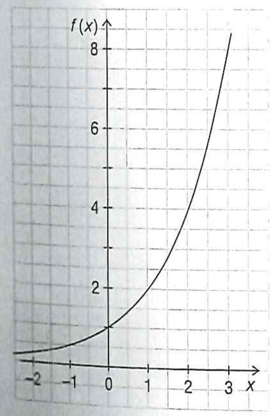
Vi ser først på funksjonen $f(x) = 2^x$.

Vi regner ut noen funksjonsverdier:

$f(-2) = 2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$ $f(-1) = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

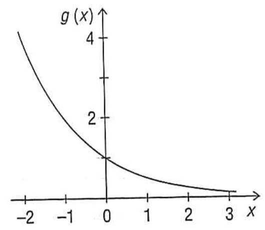
$f(0) = 2^0 = 1$ $f(1) = 2^1 = 2$

$f(2) = 2^2 = 4$ $f(3) = 2^3 = 8$



Figur 2.3

I funksjonen $f(x) = 2^x$ er grunntallet lik 2.
Av funksjonsverdiene vi har regnet ut, ser vi at hver gang x øker med 1, blir funksjonsverdien ganget med grunntallet 2.
For eksempel er $f(3) = 2^3 = 2 \cdot 2^2 = 2 \cdot f(2)$.



Figur 2.4

Så ser vi på funksjonen $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Igjen regner vi ut noen funksjonsverdier:

$$g(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{2^{-2}} = 2^2 = 4$$

$$g(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{2^{-1}} = 2$$

$$g(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{2^{3}} = \frac{1}{8}$$

Hva er funksjonsverdiene $g(0)$, $g(1)$ og $g(2)$?
Hva skjer med funksjonsverdien hver gang x øker med 1?

Sammenlikn grafene til $f(x)$ og $g(x)$. Hva har de to grafene til felles?

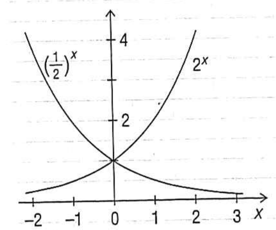
- Begge skjærer andreaksen i punktet (0 , 1)
- Begge har grunntallet som funksjonsverdi når $x = 1$

$$f(1) = 2^1 = 2 \quad \text{og} \quad g(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

- For begge blir funksjonsverdien ganget med grunntallet hver gang x øker med 1:

$$f(x+1) = 2 \cdot f(x) \quad \text{og} \quad g(x+1) = \frac{1}{2} \cdot g(x)$$

Egenskapene i punktene ovenfor er felles for alle eksponentialfunksjoner som har formen $h(x) = a^x$.



Figur 2.5

Merk!

2.9

- Når grunntallet er større enn 1, vokser funksjonsverdien når x øker
- Når grunntallet er mindre enn 1, avtar funksjonsverdien når x øker

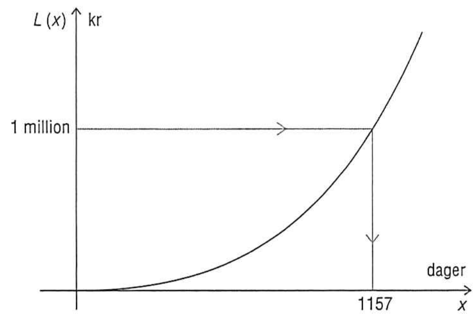
Flere eksempler

Eksempel 3

Husker du Marte fra grunnkursboka? Marte tilbød faren en avtale som bygde på eksponentiell vekst. Hun skulle få 10 kr for å vaske opp den første dagen og deretter 1 % «til potten» for hver dag hun vasket opp. Det gav vekstfaktoren 1,01, og samlet lønn etter x oppvaskdager ble

$$L(x) = 10 \cdot 1{,}01^x$$

Avtalen gav lite i starten, men etter hvert ble den Martes suksess og farens ruin.



Figur 2.6

På grafen har vi markert når Martes samlede lønn var én million kroner. Det skjedde etter 1157 dager, eller etter 3 år og 2 måneder.

Eksempel 4

Da kriminalteknikeren kom til drapsstedet, var lufttemperaturen 10 °C. Offeret, Stein D. Oed, hadde allerede vært død en stund. Kroppstemperaturen hans var 18,3 °C. Ut fra en rekke målinger regnet kriminalteknikeren ut at forskjellen mellom lufttemperaturen og Oeds kroppstemperatur avtok eksponentielt med vekstfaktoren 0,89.

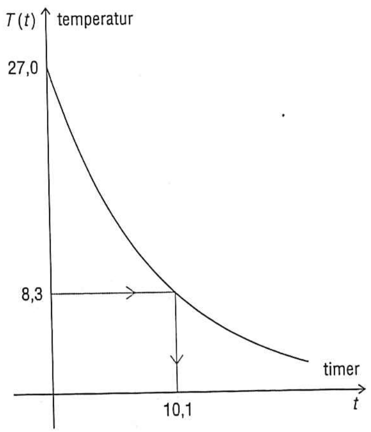
Forskjellen mellom Oeds kroppstemperatur og lufttemperaturen t timer etter mordet var

$$T(t) = 27 \cdot 0{,}89^t$$

Oed døde ved $t = 0$. Da var temperaturforskjellen 37 °C − 10 °C = 27 °C.
Det stemmer med at
$T(0) = 27 \cdot 0{,}89^0 = 27 \cdot 1 = 27$.

Grunntallet 0,89 er Oeds egen «avkjølingskonstant». Det betyr at temperaturforskjellen minket med vekstfaktoren $0{,}89 = 1 - \frac{11}{100}$.
Forskjellen mellom Oeds temperatur og lufttemperaturen ble altså 11 % mindre for hver time. Alle har en slik «avkjølingskonstant» som ligger nærmere 1 jo større vi er og dess mer klær vi har på oss.

Mordetterforskerne mistenkte umiddelbart frøken McAbre for forbrytelsen, men hun hadde vanntett alibi for de siste 11 timene. Kunne hun ha begått forbrytelsen?
Vi løser likningen $T(t) = 8{,}3$ grafisk og får at Oed døde omtrent 10,1 timer før etterforskerne kom til drapsstedet.
Tror du frøken McAbre gikk fri?



Figur 2.7

NB! Merk at vekstfunksjonene i eksemplene 3 og 4 har formen

verdi ved tiden t = startverdien · (vekstfaktoren)^t

Eksempel 5

Det lille fjellandet Nepal i Himalaya har stor befolkningsvekst.
I 1981 var befolkningen 15 millioner, og i 2001 var den 23,6 millioner.
Dette er urovekkende i et lite fjelland med begrensede ressurser.
Hvor stor har den årlige befolkningsveksten vært i prosent?

Vi går ut fra at folketallet vokste eksponentielt mellom 1981 og 2001.
Folketallet (i millioner) t år etter 1981 kaller vi $N(t)$.

Da har vi

$$N(t) = N_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$$

hvor p er den årlige befolkningsveksten i prosent og N_0 er befolkningen i 1981.

På 20 år har befolkningen vokst til 23,6 millioner.
Derfor er $N(20) = 23{,}6$, og vi får

$$N(20) = N_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{20}$$

$N_0 = 15$

$$23{,}6 = 15 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{20} \qquad (3)$$

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{20} = \frac{23{,}6}{15} = 1{,}57$$

$$1 + \frac{p}{100} = \sqrt[20]{1{,}57} = 1{,}023$$

Det betyr at vekstfaktoren er 1,023.
Befolkningen har altså økt med 2,3 % per år.

Likning (3) kan du også løse grafisk på lommeregneren. Gjør det!

I forbindelse med eksponentiell vekst bruker vi ofte begrepene halveringstid og doblingstid:

- *Halveringstiden* er den tiden det tar for en størrelse å bli halvert.
- *Doblingstiden* er den tiden det tar for en størrelse å bli doblet.

Se på eksempel 5. Hva er doblingstiden for folketallet i Nepal?
Hvis vi kaller doblingstiden T, har vi

$$N(T) = 2 \cdot N_0$$

$$N_0 \cdot 1{,}023^T = 2 \cdot N_0$$

Deler med N_0

$$1{,}023^T = 2$$

Denne likningen kan vi løse grafisk på lommeregneren.
I avsnitt 2.5 løser vi slike likninger ved regning.
Vis at befolkningen dobles i løpet av 30 år.

Oppsummering

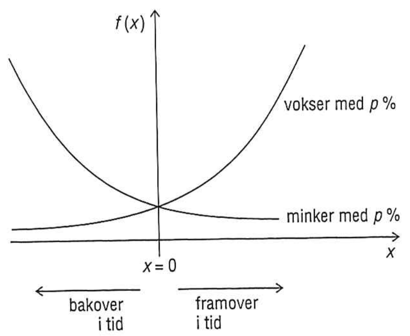
Eksponentialfunksjoner kan skrives på formen

$$f(x) = C_0 \cdot a^x$$

hvor a er grunntallet eller vekstfaktoren, og C_0 er funksjonsverdien når $x = 0$. Grunntallet a er alltid større enn null.

Når $C_0 > 0$ gjelder:

- $f(x)$ er positiv for alle x.
- Hvis $0 < a < 1$, avtar $f(x)$ når x øker.
- Hvis $a > 1$, vokser $f(x)$ når x øker.



Figur 2.8

Når $f(x)$ øker med p % hver gang x øker med 1, blir vekstfaktoren $a = 1 + \frac{p}{100}$.

Når $f(x)$ minker med p % hver gang x øker med 1, blir vekstfaktoren $a = 1 - \frac{p}{100}$.

Hvis x står for tid, svarer positive verdier av x til seinere tidspunkt enn starttidspunktet ($x = 0$), mens negative verdier av x svarer til tidligere tidspunkt enn starttidspunktet.

OPPGAVER

2.5
I en bakteriekultur er det nå 8000 bakterier. Tallet øker med 15 % per time.
Bakterietallet etter x timer kaller vi $f(x)$.
a Skriv et uttrykk for $f(x)$.
b Hva blir bakterietallet
 1 etter 2 timer
 2 etter 6 timer

2.6
Finn renten i prosent per år når
a 5000 kroner vokser til 10 000 kroner på 6 år
b 5000 kroner vokser til 10 000 kroner på 9 år

2.7
En ny bil koster 375 000 kroner. Anta at verdien av bilen minker med 18 % per år.
a Sett opp en funksjon $V(t)$ som viser bilens verdi som funksjon av alderen t.
b Skisser grafen til funksjonen.
c Hvor lang tid tar det før bilens verdi er halvert?

2.8
a Prisen på en vare som opprinnelig kostet 50 kr, steg med 10 % fire ganger på rad. Hvor mange prosent steg prisen i alt?
b Prisen på en annen vare som også kostet 50 kr, sank med 10 % fire ganger på rad. Hvor mange prosent sank prisen i alt?

2.9
Gitt funksjonene
$f(x) = 3^x$ og $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
a Tegn grafene til de to funksjonene på lommeregneren i området $x \in \langle -3, 3 \rangle$. Beskriv hvordan grafene til disse to funksjonene forholder seg til hverandre ved hjelp av begrepet symmetri. Hva er likningen for symmetriaksen?
▲ **b** Kan du forklare hvorfor vi får denne symmetrien?

2.10
Løs likningene grafisk på lommeregneren.
a $2^x = 6$
b $23 \cdot 1{,}13^x = 32$
c $2^x = x^2$

▲ **2.11**
Etter at en organisme dør, avtar mengden av den radioaktive karbonisotopen C-14 med tiden slik at mengden $N(t)$ etter t år er gitt ved

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

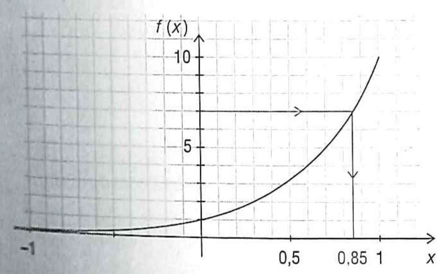
der N_0 er mengden når organismen dør.
a Hva er halveringstiden (dvs. den tiden det tar før mengden er halvert)?
b I farao Amenhoteps grav har man funnet en mumie der C-14-mengden i 1980 ble målt til 65,5 % av den normale mengden i levende organismer.
Bruk dette til å regne ut når Amenhotep døde.

2.3 10 SOM GRUNNTALL – 10^x og lg x

$10^2 = 100$
lg $100 = 2$
$10^{\lg 100} = 100$

Menneskenes virksomhet og interesser spenner vidt – fra ufattelig små elektroner til galakser som er så enorme at de sprenger vår fatteevne. For å anskueliggjøre så ulike størrelser i en modell eller i et diagram trenger vi nye matematiske verktøy. Logaritmeregningen kan blant annet brukes som et slikt verktøy.

Du lærte litt om logaritmer i grunnkurset da du løste eksponentiallikninger. Vi skal nå se grundigere på logaritmer. Logaritmer er spesielt knyttet til eksponentialfunksjoner med to grunntall, 10 og det merkelige tallet e.
Vi begynner med å se på logaritmer med grunntall 10. De kalles 10-logaritmer



Figur 2.9

Vi tar for oss eksponentialfunksjonen $f(x) = 10^x$.
For en gitt x-verdi, for eksempel $x = \frac{1}{2}$, får vi
$f\left(\frac{1}{2}\right) = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}2$.

Omvendt, for en gitt verdi for $f(x)$, for eksempel $f(x) = 7$, kan vi fra grafen finne den tilhørende x-verdien, $x = 0{,}85$.

Finn selv $f(0{,}3)$ ved hjelp av grafen.
Finn også x når $f(x) = 4$.

Litt ettertanke sier oss at $f(x)$ kan være et hvilket som helst positivt tall. Uansett hvilket positivt tall p du tenker på, så finnes det nøyaktig én x slik at 10^x blir akkurat det tallet. Det betyr at *alle* positive tall kan skrives som en potens av 10.

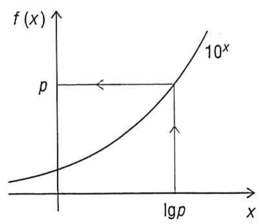
Hva må vi opphøye 10 i for å få 4?
Siden alle positive tall kan skrives som en potens av 10, er det klart at for én spesiell x-verdi er 10^x lik 4. Denne x-verdien kaller vi 10-logaritmen til 4, som vi skriver lg 4.

10-logaritmen
La p være et positivt tall.
Hvis $10^x = p$, sier vi at $x = \lg p$.

$x = \lg p$ betyr at x er det tallet 10 skal opphøyes i for å få p.

NB!
- Bare positive tall har logaritme. Det kommer av at 10^x er positiv for alle x.
- Alle positive tall har logaritme. Det kommer av at 10^x kan bli et hvilket som helst positivt tall.

Hvis $10^x = 4$, er $x = \lg 4$. Dette betyr at $10^{\lg 4} = 4$.



Figur 2.10

For alle positive tall p er
$10^{\lg p} = p$

Merk!
$\lg 0{,}1 = -1$, fordi $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$
$\lg 1 = 0$, fordi $10^0 = 1$
$\lg 10 = 1$, fordi $10^1 = 10$
$\lg 100 = 2$, fordi $10^2 = 100$

Av figur 2.9 fant vi at $10^{0{,}85} = 7$. Det betyr at $\lg 7 = 0{,}85$.
Tilsvarende ser vi at $10^{0{,}6} = 4$. Da er $\lg 4 = 0{,}6$.
Hva blir lg 0,5?

Når vi bruker en graf til å bestemme logaritmer, får vi ikke nøyaktige verdier. Det er enklere og nøyaktigere å bruke lommeregneren.

For å beregne lg 7 trykker du

[log] 7 [EXE] (= 0,845)

2.12–2.14 Klarer du å finne lg 0,01 og lg 1000 uten å bruke lommeregneren? Kontroller svarene på lommeregneren.

Eksempel 1

Vi vil skrive 4 og 0,5 som potenser med grunntall 10.
Av lommeregneren finner vi $\lg 4 = 0{,}602$ og $\lg 0{,}5 = -0{,}301$.
Altså kan vi skrive

$$4 = 10^{\lg 4} = 10^{0.602}$$

2.15 $$0{,}5 = 10^{\lg 0{,}5} = 10^{-0.301}$$

Eksempel 2

Vi skal løse likningen $10^x = 70$.
x er det tallet vi må opphøye 10 i for å få 70.
x er altså 10-logaritmen til 70.

2.16 $$x = \lg 70 = 1{,}845$$

Eksempel 3

Vi skal løse likningen $\lg y = 1{,}72$.
10-logaritmen til y skal være 1,72.
Da må vi opphøye 10 i 1,72 for å få y.

2.17 $$y = 10^{\lg y} = 10^{1{,}72} = 52{,}5$$

Eksempel 4

Tallet $4{,}37 \cdot 10^{12}$ er skrevet på standardform.
Vi skal skrive tallet som potens av 10.
På lommeregneren finner vi $\lg(4{,}37 \cdot 10^{12}) = 12{,}64$
Det viser at $4{,}37 \cdot 10^{12} = 10^{12{,}64}$.

Å omforme a^x til 10^{kx}

Vi har ofte bruk for å omforme en eksponentialfunksjon med et grunntall a til en eksponentialfunksjon med grunntall 10.
Å omforme betyr å få funksjonsuttrykket til å *se* annerledes ut uten at funksjonen endres – funksjonen har bare fått «nye klær».
Funksjons*grafen* er akkurat den samme.

La oss se på Martes lønnsfunksjon, $L(x) = 10 \cdot 1{,}01^x$ (eksempel 3 i avsnitt 2.2). Vi vil skrive $1{,}01^x$ med 10 som grunntall.
Ut fra definisjonen av 10-logaritmen kan vi skrive $1{,}01 = 10^{\lg 1{,}01}$.
Det betyr at

$$L(x) = 10 \cdot 1{,}01^x = 10 \cdot \left(10^{\lg 1{,}01}\right)^x = 10 \cdot 10^{(\lg 1{,}01) \cdot x}$$

Siden $\lg 1{,}01 = 0{,}00432$, kan vi skrive

$$L(x) = 10 \cdot 10^{0{,}00432 \cdot x}$$

2.18 som har samme graf som den opprinnelige lønnsfunksjonen.

pH-verdi

Kjemikerne bruker pH om surhetsgrad for væsker. Sitronsaft, sur nedbør og magesaft er surt med pH-verdier under 7. Rent vann er nøytralt med pH lik 7. Ammoniakk er basisk og har pH større enn 7.

pH er et mål for konsentrasjonen av H_3O^+-ioner i væsken.
Når pH = 5, er konsentrasjonen 10^{-5}.
Det betyr at det er 10^{-5} mol H_3O^+-ioner per dm^3 væske.
Ett mol H_3O^+-ioner er det samme som $6 \cdot 10^{23}$ ioner.

Vi har $\lg(10^{-5}) = -5$.
pH er altså lik minus 10-logaritmen til konsentrasjonen.

$$\text{pH} = -\lg(\text{konsentrasjonen av } H_3O^+\text{-ioner})$$
$$\text{Konsentrasjonen av } H_3O^+\text{-ioner} = 10^{-\text{pH}}$$

Merk at hvis pH-verdien *synker* fra 5 til 4, *øker* konsentrasjonen av H_3O^+ -ioner fra 10^{-5} til 10^{-4} mol per dm^3 væske. Jo *høyere* pH-verdien er, desto *mindre* er konsentrasjonen av H_3O^+-ioner.

Eksempel 5

Det er $6{,}3 \cdot 10^{-10}$ mol H_3O^+-ioner per dm^3 av en væske.
Hvilken pH-verdi har den?
Vi finner pH = $-\lg(6{,}3 \cdot 10^{-10}) = 9{,}2$.

Eksempel 6

En væske har pH-verdien 3,7.
Hva er konsentrasjonen av H_3O^+-ioner?
pH = 3,7 betyr at konsentrasjonen er $10^{-3{,}7}$.
På lommeregneren finner vi at $10^{-3{,}7} = 2{,}0 \cdot 10^{-4}$.
Det er altså $2{,}0 \cdot 10^{-4}$ mol H_3O^+-ioner per dm^3 væske.

Eksempel 7

Vi vil finne antall H_3O^+-ioner per dm^3 væske når pH = 5.
Antall ioner er

$$10^{-5} \cdot 6 \cdot 10^{23} = 6 \cdot 10^{18}$$

San Francisco 1989

Richter-skalaen

Nesten hvert år inntreffer jordskjelv med tap av menneskeliv et eller annet sted i verden. Sammen med tapet av menneskeliv blir det ofte oppgitt et tall «på Richter-skalaen» for å fortelle hvor sterkt jordskjelvet var. Tabellen nedenfor gir en beskrivelse av noen M-verdier på Richter-skalaen.

$M = -1{,}5$	20 kg stein faller fra 1 m	$M = 4{,}5$	En del småskader nærmest jordskjelvsenteret
$M = 1{,}0$	Sprenging ved veibygging	$M = 5{,}5$	Svakt jordskjelv. Små skader på dårlige bygninger i et større område
$M = 2{,}5$	Oppfattes ikke av mennesker, men registreres av instrumenter	$M = 7{,}0$	Kraftig jordskjelv. Store skader, spesielt der husene ikke er stabile
$M = 3{,}5$	Oppfattes av en del mennesker	$M = 8{,}2$	San Francisco 1906
$M = 3{,}9$	Forekommer ikke sjelden i Norge	$M = 8{,}4$	Chile 1960

Eksempel 8

Det er sagt at hvis alle kinesere hopper samtidig ned fra én meter, vil det utvikles så mye energi at det blir en katastrofe for jorda.

Vi kan undersøke om det er sant. Her er det snakk om energioverføring til jordoverflaten akkurat som ved jordskjelv. Når vi diskuterer slike seismiske fenomener, bruker vi Richter-skalaen som forteller hvor sterkt et skjelv er. Styrken M på Richter-skalaen er definert som

$$M = \frac{\lg E - 4{,}4}{1{,}5}$$

hvor E er energien i joule.

I naturfag har du kanskje hørt at den frigjorte energien når vi slipper en masse m fra høyden h, er lik $m \cdot g \cdot h$ joule $= m \cdot 9{,}81 \cdot h$ joule. Denne formelen bruker vi nå på 1,1 milliarder kinesere som hopper fra én meter. La oss anta at hver kineser i gjennomsnitt veier 50 kg. Det gir energien

$$E = (1{,}1 \cdot 10^9 \cdot 50) \cdot 9{,}81 \cdot 1 \text{ joule} = 5{,}4 \cdot 10^{11} \text{ joule}$$

Altså er

$$M = \frac{\lg\left(5{,}4 \cdot 10^{11}\right) - 4{,}4}{1{,}5} = 4{,}9$$

Utslaget på Richter-skalaen ville altså bli 4,9 om kineserne hoppet samtidig – på et lite område.

OPPGAVER

2.12
Finn 10-logaritmen til
a 1000 100 10 1 0,1 0,01 0,000 001
b 3000 300 30 3 0,3 0,03 0,000 003
c $10^{5,3}$ $10^{-2,7}$ 10^0

2.13
Skriv potensene som vanlige tall.
$10^{3,14}$ $10^{2,14}$ $10^{1,14}$ $10^{0,14}$ $10^{-0,86}$ $10^{-1,86}$ $10^{-2,86}$

2.14
Skriv disse talluttrykkene enklere:
a $10^{\lg 2,5}$ **b** $10^{\lg 50}$ **c** $10^{\lg 0,15}$ **d** $10^{\lg 100}$

2.15
Skriv som potens av 10.
0,02 0,8 2,5 8 15 75 100 220

2.16
Løs likningen.
a $10^x = 5$ **b** $10^x = 120$
c $10^x = 1200$ **d** $10^x = 150\,000$

2.17
Finn tallet y når lg y er
a –3,5 1,3 3,2 4 4,2 9
b –1,2 –0,2 0,8 1,8 2,8 6,2

2.18
Omform Oeds funksjon $T(t) = 27 \cdot 0{,}89^t$ til en funksjon av formen $T(t) = C \cdot 10^{kt}$.
Kontroller at denne funksjonen har samme graf som den opprinnelige.

▲ **2.19**
a Hvor mange H_3O^+-ioner er det i 2,5 liter syreløsning med pH-verdi 3?
b Hvor mange H_3O^+-ioner er det i 2,5 liter ammoniakkløsning med pH-verdi 10?
c Hva er forholdet mellom antall H_3O^+-ioner i oppgave a og b gitt på standardform?
d Kunne du ha funnet svaret i oppgave c bare ved å se på pH-verdiene til løsningene?

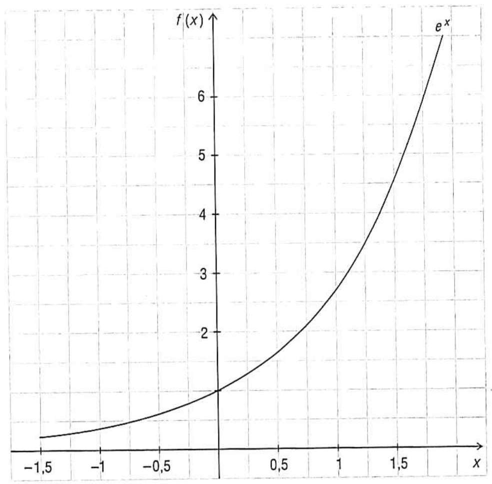
▲ **2.20**
I 1997 falt et 1300 tonn tungt stykke av berget ned fra Trollveggen i Romsdalen. Stykket delte seg opp og raste 400 m ned i ura. Heldigvis var det ingen klatrere i veggen da raset gikk. Bruk metoden i eksempel 8 til å anslå hvor på Richter-skalaen raset ville plassere seg.

2.4 e SOM GRUNNTALL – e^x OG ln x

$e^2 = 7{,}39$
$\ln 7{,}39 = 2$
$e^{\ln 7{,}39} = 7{,}39$

e = 2,718281828... er det mest brukte grunntallet av alle, både innenfor naturvitenskap og økonomi.
e er et irrasjonalt tall akkurat som π.
Grunnen til at vi bruker dette merkelige tallet som grunntall, og kaller det «naturlig», vil du forstå etter hvert. Vi påstår at før din matematiske karriere er over, vil du være like kjent med tallet e som du nå er med tallet π.

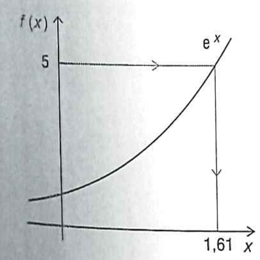
Funksjonen $f(x) = e^x$ kalles den *naturlige eksponentialfunksjonen*. La oss se litt nærmere på den.



Figur 2.11

På figuren har vi tegnet grafen til e^x. Grafen krysser y-aksen i punktet (0 , 1) og går gjennom punktet (1 , e). Definisjonsmengden for funksjonen er alle reelle tall (grafisk betyr det hele x-aksen). Verdimengden er alle *positive*, reelle tall (grafisk betyr det den positive y-aksen).

Hvis vi setter $x = 1$, får vi funksjonsverdien $e^1 = e$. Setter vi $x = 1{,}5$ får vi $e^{1,5} = 4{,}5$, osv.
Som for 10-logaritmen kan vi gå den motsatte veien og spørre oss hvilken x-verdi vi må opphøye e i for å få et bestemt positivt tall, for eksempel 5. Den x-verdien som er slik at $e^x = 5$, kaller vi den naturlige logaritmen til 5, som vi skriver ln 5.



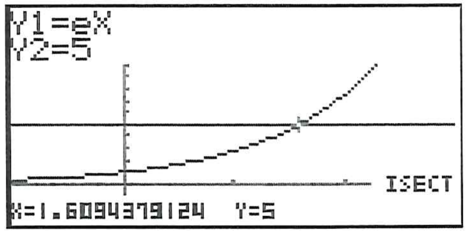
Figur 2.12

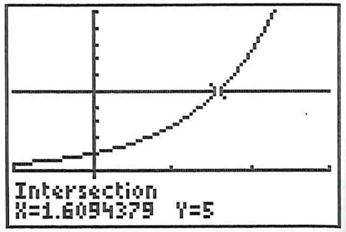
Den naturlige logaritmen
La p være et positivt tall.
Hvis $e^x = p$, sier vi at $x = \ln p$.

$x = \ln p$ betyr at x er det tallet e skal opphøyes i for å få p.

Eksempel 1

Vi vil finne ln 5 ved hjelp av grafen til e^x på lommeregneren.
Vi legger inn e^x for y1 og 5 for y2 og tegner grafene i samme bilde.
Ved å bruke G-Solv (CALC) finner vi skjæringspunktet mellom grafene.





Figur 2.13 Av figuren ser vi at $x = 1{,}61$. Det betyr at $\ln 5 = 1{,}61$.

Som for 10-logaritmen er den naturlige logaritmen bare definert for positive tall. Men alle positive tall har en naturlig logaritme.

Hvis $e^x = 5$, er $x = \ln 5$. Dette betyr at $e^{\ln 5} = 5$.

For alle positive tall p er
$e^{\ln p} = p$

Merk!
$\ln 1 = 0$, fordi $e^0 = 1$
$\ln e = 1$, fordi $e^1 = e$

Eksempel 2

Hvilken eksponent må e opphøyes i for å gi 0,5?
Spørsmålet kan formuleres som en likning, $e^x = 0{,}5$.
Gå fram på samme måte som i eksempel 1, og vis at $\ln 0{,}5 \approx -0{,}7$.

I eksemplene 1 og 2 fant vi naturlige logaritmer ved å bruke grafen til $f(x) = e^x$. Det er enklere å bruke ln-tasten på lommeregneren.
For å finne ln 0,5 trykker du

ln 0.5 EXE (= –0,693)

Eksempel 3

Vi vil skrive 4 som en potens av e.
På lommeregneren finner vi at $\ln 4 = 1{,}386$.
Derfor har vi

2.21–2.23 $4 = e^{\ln 4} = e^{1{,}386}$

Eksempel 4

Vi skal løse likningen $e^x = 25$.
x er det tallet vi må opphøye e i for å få 25.
x er altså den naturlige logaritmen til 25.

2.24 $x = \ln 25 = 3{,}219$

Eksempel 5

Vi skal løse likningen $\ln y = 1{,}72$.
Den naturlige logaritmen til y skal være 1,72.
Da må vi opphøye e i 1,72 for å få y.

2.25 $y = e^{1{,}72} = 5{,}58$

Eksempel 6

Vi skal løse likningen $e^x - 6e^{-x} - 1 = 0$.
Her ser vi på e^x som ukjent.

$$e^x - 6e^{-x} - 1 = 0$$
$$(e^x - 6 \cdot \frac{1}{e^x} - 1) \cdot e^x = 0 \cdot e^x$$
$$(e^x)^2 - 6 - 1 \cdot e^x = 0$$

$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
Vi multipliserer med e^x

Setter vi $e^x = u$, blir $(e^x)^2 = u^2$. Vi får da

$$u^2 - u - 6 = 0$$
$$u = -2 \lor u = 3$$

abc-formelen

$$e^x = -2 \lor e^x = 3$$
$$e^x = 3$$
$$x = \ln 3 = 1{,}099$$

$e^x > 0$

Du kan kontrollere løsningen grafisk på lommeregneren. Prøv det!
Hva blir løsningen hvis du skifter ut e med 10 i den opprinnelige
2.26 likningen?

Å omforme a^x til e^{kx}

Eksempel 7

Vi kan omforme Oeds funksjon i eksempel 4 i avsnitt 2.2 slik at grunntallet blir e. Funksjonen er

$$T(t) = 27 \cdot 0{,}89^t$$

Vi har

$$0{,}89^t = \left(e^{\ln 0{,}89}\right)^t = e^{(\ln 0{,}89)\cdot t} = e^{-0{,}1165 \cdot t}$$

Oeds funksjon kan derfor skrives

$$T(t) = 27 \cdot e^{-0{,}1165t}$$

Kontroller at grafen er den samme for de to uttrykkene.

Framgangsmåten i eksemplet gjelder generelt.

Eksponentialfunksjon med e som grunntall
Enhver eksponentialfunksjon kan omformes til en eksponentialfunksjon med e som grunntall:

$$f(x) = C\cdot a^x = C\cdot(e^{\ln a})^x = C\cdot e^{(\ln a)\cdot x} = C\cdot e^{kx}, \text{ der } k = \ln a$$

Omvendt har vi at

$$C\cdot e^{kx} = C\cdot\left(e^k\right)^x = Ca^x, \quad \text{der} \quad a = e^k$$

OPPGAVER

2.21
Finn den naturlige logaritmen til
3 4 0,7 2,72 7,39 148,4

2.22
Skriv potensene som vanlige tall.
$e^{3,14}$ $e^{2,14}$ $e^{1,14}$ $e^{0,14}$ $e^{-0,86}$ $e^{-1,86}$ $e^{-2,86}$

2.23
Skriv tallene som en potens av e.
0,5 1 1,5 3,5 20 50

2.24
Løs likningene.
a $e^x = 0{,}8$ **b** $e^x = 25$
c $e^x = 4900$ **d** $e^x = 50\,000$

2.25
Finn tallet y når $\ln y$ er
a –3,5 1,3 3,2 4 4,2 9
b –1,2 –0,2 0,8 1,8 2,8

2.26
a Løs likningen ved regning og kontroller svaret grafisk på lommeregneren.
$e^{2x} + e^x - 6 = 0$
b Lag en likning som likner den i oppgave a, og løs den.

2.27
Omform Martes funksjon $L(x) = 10\cdot 1{,}01^x$ til en funksjon av typen
$f(x) = 10\cdot e^{kx}$
Kontroller omformingen ved å sammenlikne grafene til de to uttrykkene.

2.5 NOEN SETNINGER OM LOGARITMER

$\ln a^x = x\ln a$
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$
$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Vi minner om definisjonene av 10-logaritmen og den naturlige logaritmen:

- Når $10^x = p$, er $x = \lg p$
- Når $e^x = p$, er $x = \ln p$

NB! Bare positive tall har logaritmer!

Logaritmer og potenser er to sider av samme sak.
Det betyr at det hører en logaritmeregel til hver potensregel.

Siden $5 = 10^{\lg 5}$, kan vi skrive

$$5^2 = \left(10^{\lg 5}\right)^2 = 10^{(\lg 5)\cdot 2} = 10^{2\lg 5}$$

Når 5^2 kan skrives $10^{2\ln 5}$, vet vi at

$$\lg\left(5^2\right) = 2\lg 5$$

På samme måte kan vi vise at $\ln\left(5^2\right) = 2\ln 5$.

Utledningen over gjelder fortsatt hvis vi bytter ut 5 med et hvilket som helst *positivt* tall a og 2 med et hvilket som helst reelt tall x.

Det gir oss:

Den første logaritmesetningen

$$\lg a^x = x\lg a \qquad (1)$$
$$\ln a^x = x\ln a$$

Merk!
Setningen gjelder bare for $a > 0$.

I grunnkurset brukte du (1) når du løste eksponentiallikninger ved regning.

Eksempel 1

Kjell Røsus plasserer 70 000 kroner i et aksjefond.
Han regner med at avkastningen vil ligge stabilt på 9,5 % per år.
Hvor lang tid tar det før kapitalen er doblet?

Røsus regner med at vekstfaktoren er $1 + \frac{9{,}5}{100} = 1{,}095$.

Etter x år vil da kapitalen ha vokst til $70\,000\cdot 1{,}095^x$ kroner.
Vi finner doblingstiden ved å løse likningen

$$70\,000\cdot 1{,}095^x = 140\,000$$
$$1{,}095^x = \frac{140\,000}{70\,000}$$
$$1{,}095^x = 2$$
$$\ln 1{,}095^x = \ln 2 \qquad \text{Tar ln til begge sider}$$
$$x\ln 1{,}095 = \ln 2 \qquad \ln a^x = x\ln a$$
$$x = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}095} = 7{,}6$$

Det tar 7,6 år å doble kapitalen hvis avkastningen blir slik Røsus regner med.
Kontroller at du får samme resultat dersom du løser oppgaven med 10-logaritmer i stedet for naturlige logaritmer.

Metoden i eksempel 1 er generell.
Vi kan derfor skrive opp følgende algoritme:

Løsning av eksponentiallikningen $a^x = b$

Med 10-logaritme	Med naturlig logaritme
$a^x = b$	$a^x = b$
$\lg a^x = \lg b$	$\ln a^x = \ln b$
$x \lg a = \lg b$	$x \ln a = \ln b$
$x = \dfrac{\lg b}{\lg a}$	$x = \dfrac{\ln b}{\ln a}$

2.28, 2.29

Eksempel 2

Det er vanlig å snakke om *doblingstiden* av en kapital. På børsen brukes den såkalte *72-regelen*. Den sier at når renten er p prosent per år, tar det $\frac{72}{p}$ år å doble kapitalen.
La oss sjekke 72-regelen når renten er 10 % per år.
Når en kapital K_0 dobles på x år med 10 % rente, får vi

$$K_0 \cdot 1{,}10^x = 2K_0$$
$$1{,}10^x = 2$$
$$x \lg 1{,}10 = \lg 2$$
$$x = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}10} = 7{,}3$$

Kapitalen dobles på 7,3 år.
2.30 72-regelen gir oss doblingstiden $\frac{72}{10}$ år = 7,2 år. Ikke ille!

Flere logaritmesetninger

Definisjonen av den naturlige logaritmen gir at $3 \cdot 5 = e^{\ln(3 \cdot 5)}$.
Men vi kan like gjerne skrive

$$3 \cdot 5 = e^{\ln 3} \cdot e^{\ln 5} = e^{\ln 3 + \ln 5}$$

Det betyr at

$$\ln(3 \cdot 5) = \ln 3 + \ln 5$$

På samme måte kan vi vise at lg (3 · 5) = lg 3 + lg 5.

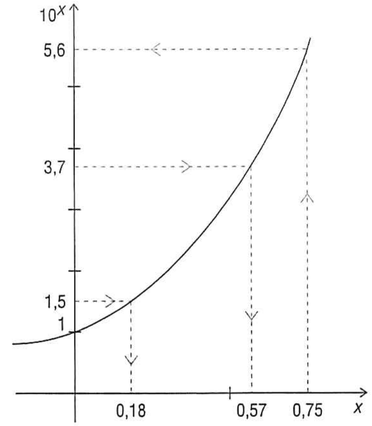
Dette resultatet gjelder generelt og gir oss

Den andre logaritmesetningen

$$\lg(ab) = \lg a + \lg b$$
$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \qquad (2)$$

Eksempel 3

Vi kan multiplisere 1,5 og 3,7 ved å addere 10-logaritmene til tallene og opphøye 10 i den summen vi finner.



Figur 2.14

$$1{,}5 \cdot 3{,}7 \overset{\text{graf}}{=} 10^{0{,}18} \cdot 10^{0{,}57} \overset{\substack{\text{potens-}\\\text{regel}}}{=} 10^{0{,}18+0{,}57} = 10^{0{,}75} \overset{\text{graf}}{=} 5{,}6$$

Sjekk svaret på lommeregneren.

Endelig har vi den tredje og siste logaritmesetningen.
Den utleder vi i en oppgave i oppgavesamlingen.

Den tredje logaritmesetningen

$$\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b$$
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \qquad (3)$$

Merk!
Setning (2) og (3) gjelder bare når $a > 0$ og $b > 0$.

I eksemplet nedenfor bruker vi de tre logaritmesetningene begge veier. Vi bruker her 10-logaritmen, men vi kunne like gjerne ha brukt den naturlige logaritmen.

Eksempel 4

La a være et positivt tall. Da har vi

$$\lg a^3 = 3 \lg a$$
$$\lg(3a) = \lg 3 + \lg a$$
$$\lg\left(\frac{3}{a}\right) = \lg 3 - \lg a$$

$$\lg\left(\sqrt{a}\right) = \lg a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\lg a$$

$$3\lg a - 2\lg 4 = \lg a^3 - \lg 4^2 = \lg\left(\frac{a^3}{16}\right)$$

$$\frac{1}{2}\lg a + \frac{1}{2}\lg 5 = \lg a^{\frac{1}{2}} + \lg 5^{\frac{1}{2}} = \lg\left(a^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}\right) = \lg(5a)^{\frac{1}{2}} = \lg\sqrt{5a}$$

2.31, 2.32 Finn ut hvilken logaritmesetning vi har brukt i hvert trinn!

Likninger med ln x og lg x

Eksempel 5

Vi skal løse likningen $2\lg x = 4$, $x > 0$.

$$2\lg x = 4$$

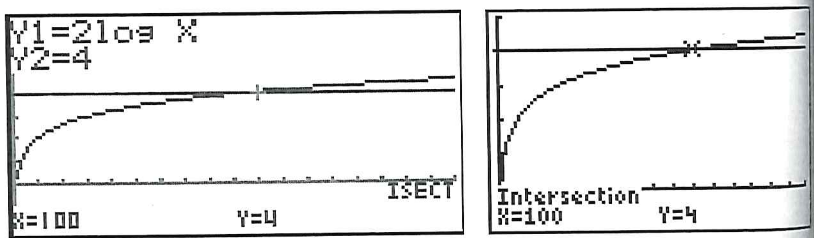
$$\lg x = 2$$

VS = HS ⇔ $10^{VS} = 10^{HS}$

$$10^{\lg x} = 10^2$$

$$x = 10^2 = 100$$

Før du er blitt sikker i logaritmeregning, bør du sette prøve på svaret. I eksempel 5 gjør du det ved å erstatte x med 100 i likningen $2\lg x = 4$.
Du kan også kontrollere at du ikke har mistet noen løsning: Sett $y1 = 2\lg x$ og $y2 = 4$, og sjekk på lommeregneren at grafene ikke skjærer hverandre andre steder enn for $x = 100$.



Figur 2.15

Eksempel 6

Vi vil løse likningen $\ln\left(x^2\right) = 4$.

Fordi $x^2 > 0$ for alle $x \neq 0$, er det nok at $x \neq 0$ i denne likningen.

$$\ln\left(x^2\right) = 4$$

$$e^{\ln\left(x^2\right)} = e^4$$

VS = HS ⇔ $e^{VS} = e^{HS}$

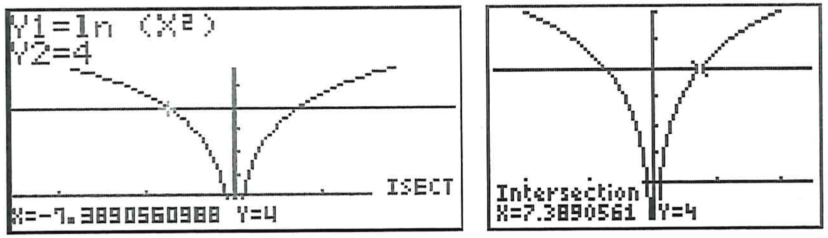
$$x^2 = e^4$$

$$x = \pm\sqrt{e^4}$$

$$x = \pm e^2 = \pm 7{,}39$$

$$x = -7{,}39 \quad \text{eller} \quad x = 7{,}39$$

Som i forrige eksempel er det lurt å sette prøve eller kontrollere svaret grafisk på lommeregneren.



Figur 2.16

Klem løste likningen ved å bruke logaritmesetning (1).
Løsningen så slik ut:

$$\ln\left(x^2\right) = 4$$

$$2\ln x = 4$$

$$\ln x = 2$$

$$x = e^2 = 7{,}39$$

Klem mistet altså en løsning!
Hvordan gikk det til?

Det kommer av at bare positive tall har logaritmer.
Omformingen $\ln\left(x^2\right) = 2\ln x$ gjelder derfor bare når $x > 0$.

Da Klem skrev $2\ln x = 4$, forutsatte han egentlig at $x > 0$ uten å tenke over det!

NB!

Hvis x er et *partall*, har $\lg a^x$ og $\ln a^x$ mening også når a er negativ.
For da er $a^x > 0$, selv om a er negativ.
Men siden lg a og ln a *ikke* har mening når a er negativ, kan du ikke bruke logaritmesetning (1) når $a < 0$.

Eksempel 7

La oss løse likningen $(\lg x)^2 - 4 = 0$.
Her må x være positiv. Vi får

$$(\lg x)^2 - 4 = 0$$
$$(\lg x)^2 = 4$$
$$\lg x = \pm 2$$
$$\lg x = -2 \quad \vee \quad \lg x = 2$$
$$x = 10^{-2} = 0{,}01 \quad \vee \quad x = 10^2 = 100$$

Sett for sikkerhets skyld prøve på de to svarene!

Legg merke til at *metoden* i eksemplene 6 og 7 er den samme enten det er en naturlig logaritme eller en 10-logaritme i likningen.

Eksempel 8

La oss til slutt løse likningen $\ln(x+2) = 2\ln x$.
Her må $x > 0$. Vi får

$$\ln(x+2) = 2\ln x \qquad 2\ln x = \ln x^2$$
$$\ln(x+2) = \ln x^2$$
$$x+2 = x^2 \qquad \text{abc-formelen}$$
$$x = -1 \quad \text{eller} \quad x = 2 \qquad x>0$$
$$x = 2$$

Merk!
Når du løser eksponentiallikninger og logaritmelikninger, får du bruk for disse ekvivalensene:

- $\ln x = \ln a \quad \Leftrightarrow \quad x = a$
- $\ln x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = e^a$
- $e^x = e^a \quad \Leftrightarrow \quad x = a$
- $e^x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln a$

2.34, 2.35 De samme ekvivalensene gjelder når grunntallet er 10.

Et historisk eksempel

På 1600-tallet ble logaritmer utviklet som et verktøy for å gjøre divisjon og multiplikasjon enklere. I en verden uten lommeregnere og med et stadig større behov for å regne med tall var det mye å spare på slike forenklinger.

Det var skotten John Napier som fikk ideen til å bruke logaritmer til å forenkle tallregningen. Ved å bruke logaritmer kunne han gjøre multiplikasjon om til addisjon og divisjon om til subtraksjon.

Napier brukte 0,9999999 som grunntall da han startet arbeidet med å lage en logaritmetabell. Heldigvis for oss tok hans kollega Henry Briggs over arbeidet og lagde en logaritmetabell med 10 som grunntall. Tabellen, som kom ut i 1624, omfattet 10-logaritmene for heltallene 1–20 000 og 90 000–100 000 med opptil 14 desimaler. Dette enorme arbeidet brukte Briggs noen år på. Men det sparte samfunnet for et raskt økende antall årsverk hvert år. Logaritmene ble en stor suksess. På Briggs' tid vokste nemlig samfunnets behov for matematiske utregninger nærmest eksplosivt. Det gjaldt beregninger innen vitenskap, militærteknologi, arkitektur, kartografi m.m.

La oss se hvordan bruk av en logaritmetabell gjør mulitplikasjon om til addisjon. Se på $1{,}05 \cdot 1{,}17$.
Av logaritmetabellen nedenfor finner vi at

$$\lg 1{,}05 = 0{,}021 \quad \text{og} \quad \lg 1{,}17 = 0{,}068$$

Det gir

$$\lg(1{,}05 \cdot 1{,}17) = 0{,}021 + 0{,}068 = 0{,}089$$

Så bruker vi logaritmetabellen den motsatte veien:
Vi finner fram til det tallet som har 0,089 som logaritme.
Det er 1,23. Det viser at $1{,}05 \cdot 1{,}17 = 1{,}23$.

Figur 2.17

lg x										
1. og 2. desimal	3. desimal									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	1,000	1,002	1,005	1,007	1,009	1,012	1,014	1,016	1,019	1,021
,01	1,023	1,026	1,028	1,030	1,033	1,035	1,038	1,040	1,042	1,045
,02	1,047	1,050	1,052	1,054	1,057	1,059	1,062	1,064	1,067	1,069
,03	1,072	1,074	1,076	1,079	1,081	1,084	1,086	1,089	1,091	1,094
,04	1,096	1,099	1,102	1,104	1,107	1,109	1,112	1,114	1,117	1,119
0,05	1,122	1,125	1,127	1,130	1,132	1,135	1,138	1,140	1,143	1,146
,06	1,148	1,151	1,153	1,156	1,159	1,161	1,164	1,167	1,169	1,172
,07	1,175	1,178	1,180	1,183	1,186	1,189	1,191	1,194	1,197	1,199
,08	1,202	1,205	1,208	1,211	1,213	1,216	1,219	1,222	1,225	1,227
,09	1,230	1,233	1,236	1,239	1,242	1,245	1,247	1,250	1,253	1,256
0,10	1,259	1,262	1,265	1,268	1,271	1,274	1,276	1,279	1,282	1,285
,11	1,288	1,291	1,294	1,297	1,300	1,303	1,306	1,309	1,312	1,315

Den eksplosive økningen av samfunnets beregningsbehov har fortsatt til i dag. Sett i lys av det er dagens PC-er bare den naturlige fortsettelsen på Briggs logaritmetabell. Har du tenkt over at mye av det som skjer inni en mobiltelefon eller i en PC, er matematiske beregninger? Det utføres så mange beregninger at en trenger enheten megaflop når en snakker om dem. Én megaflop er 1 million beregninger per sekund. Omtrent så mye trengs for å få til grafikken på en moderne PC.

Det var faktisk Napiers og Briggs' logaritmer, og det at desimaltall kom mer og mer i bruk, som gav dødsstøtet til det romerske tallsystemet.

OPPGAVER

2.28
Løs likningene vekselvis ved hjelp av den naturlige logaritmen og 10-logaritmen.

a $3^x = 4$ b $3^x = 0{,}4$

c $3^x = 1$ d $1{,}05^x = 1{,}08$

e $1{,}09^x = 2$ f $1{,}09^x = 0{,}5$

g $\left(1+\frac{p}{100}\right)^5 = 1{,}6$ h $\left(1+\frac{p}{100}\right)^5 = 0{,}7$

2.29
Se på eksempel 4 i avsnitt 2.2.
For å finne ut hvor lang tid det har gått siden Stein D. Oed ble drept, må kriminalteknikeren løse likningen $27 \cdot 0{,}89^t = 8{,}3$.
Kan du hjelpe henne med å løse den?

2.30
a Sjekk 72-regelen i eksempel 2 for forskjellige rentesatser.
b Det finnes en 65-regel for halveringstid ved eksponentiell vekst. Hva tror du den regelen sier?

2.31
Skriv logaritmene uttrykt ved lg a og lg b:

a $\lg (a^2 \cdot b)$ b $\lg\left(\frac{a^2}{b}\right)$

c $\lg a^3 - \lg b^2$ d $\lg\left(\frac{1}{a \cdot b}\right)$

2.32
Finn et enklere uttrykk for

a $\lg\left(a^2 \cdot \sqrt{a}\right)$ b $\lg\left(\frac{1}{a^5}\right)$

c $2\lg a^3 - \lg a^2$

▲ **2.33**
Oddulf og Gunnfrid skal på fjelltur.
De har med seg en god 2-literstermos med solbærtoddi som er 93 grader varm.
Vi regner med at temperaturen i ryggsekken vil være rundt –5 grader.
Temperaturforskjellen mellom toddien og lufta minker med 1,7 % per time.
Temperaturforskjellen t timer etter at turen startet er derfor gitt ved
$T(t) = 98 \cdot 0{,}983^t$
hvor 0,983 er termosens avkjølingskonstant.
a Hva er temperaturen på solbærtoddien etter 30 timer? Løs oppgaven ved regning. Sjekk svaret grafisk på lommeregneren.
b Hva ville temperaturen ha vært etter 30 timer hvis de hadde forvarmet termosen med kokende vann, slik at solbærtoddien var 100 grader til å begynne med? Sammenlikn med oppgave a.

▲ **2.34**
Løs likningene.
a $\lg x^2 - \lg x = \lg 8$
b $\lg x^2 + \lg x = \lg 8$
c $\lg x^4 + \lg 2x^2 = \lg 5$
d $\ln x = -0{,}25$
e $(\ln x)^2 = 4$
f $\ln x^2 = 4$
g $\ln x^3 = 3$

▲ **2.35**
Løs likningene.
a $(\ln x)^2 + 3 \ln x = 0$
b $(\ln x)^2 - 2 \ln x - 3 = 0$
c $\ln x^2 + \ln 4 = 0$
d $3 \ln x + \ln x^2 = 5$
e $\lg (x + 1) + \lg (x - 1) = \lg 8$
f $\ln (6 - x) = 2 \ln x$

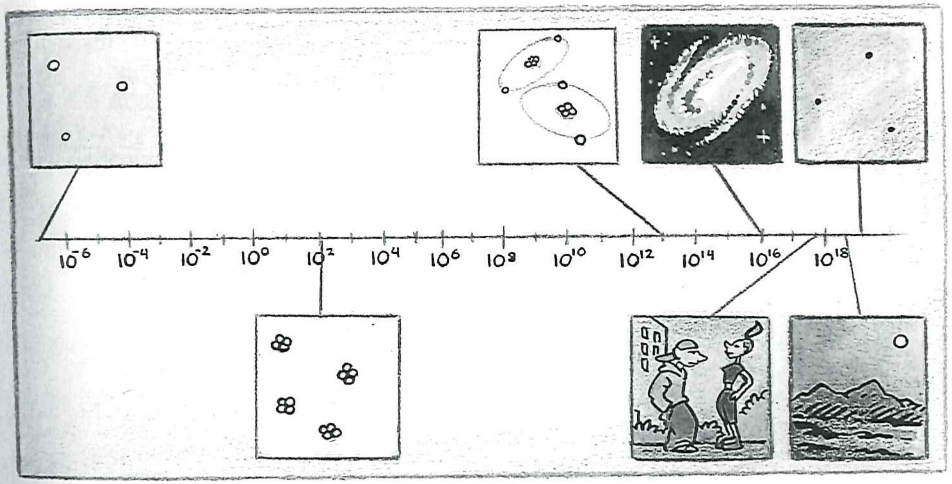
2.6 LOGARITMISK SKALA

Gjennom århundrer har menneskene skuet opp mot stjernehimmelen og undret seg over vår plass i universet.
Har tiden en begynnelse?
Er universet uendelig – og hva betyr i tilfelle det?

Vår plass i tiden ser slik ut sett i lys av dagens viten:

Universets historie (i sekunder)

10^{-7}	Protoner dannes.
10^{0}	Universet er 1 s – atomkjerner dannes.
10^{2}	Heliumkjerner dannes.
10^{13}	Atomer dannes. Universet blir gjennomsiktig.
10^{16}	Stjerner og galakser blir til.
$5 \cdot 10^{17}$	Nå!
$3{,}2 \cdot 10^{18}$	Utbredt stjernedød. Natten mørkner.
10^{19}	Galaksenes stjerner spres ut i det ekstragalaktiske rom. Døde planeter irrer i en evigvarende natt.



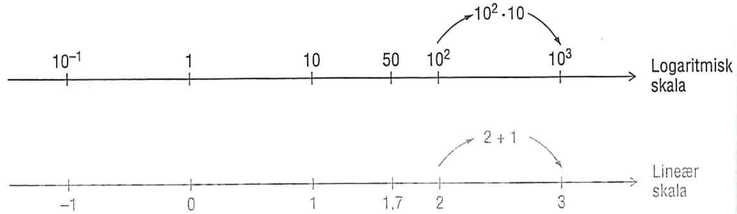
Figur 2.18

For å kunne anskueliggjøre det enorme tidsspennet har vi lagd figuren slik at vi tar lengre og lengre skritt *i tid* jo lenger mot høyre vi går.
Mellom tidspunktene 10^1 s og 10^2 s er samme lengde på aksen som mellom tidspunktene 10^{16} s og 10^{17} s.
I det første tilfellet svarer avstanden til 10^2 s – 10^1 s = 90 s.
I det andre tilfellet svarer den til 10^{17} s – 10^{16} s = 2,9 milliarder år.

Mellom tidspunktene 10^{17} og 10^{18} er det også samme avstand. Her svarer det til 29 milliarder år – dobbelt så lang tid som universet har eksistert.

Du ser at betydningen av en lengdeenhet på skalaen er avhengig av hvor på skalaen vi er. For hver gang vi går én enhet til høyre på skalaen, svarer ett trinn til 10 ganger så lang tid.
Dette er kjennetegnet på det vi kaller en *logaritmisk skala*.

La oss gå nærmere inn på hvordan vi lager en logaritmisk skala.



Figur 2.19

Figur 2.19 viser et utsnitt av en logaritmisk skala sammen med den tilsvarende lineære skalaen. Den lineære skalaen er til hjelp når vi skal merke av tall på den logaritmiske skalaen.

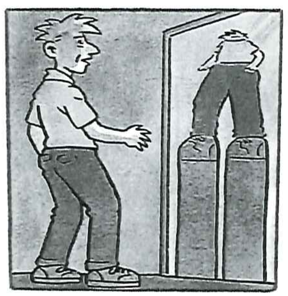
Ser du sammenhengen mellom plasseringen av tallene -1 , 0 , 1 , 2 og 3 på den lineære skalaen og 10^{-1} , $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, 10^2 og 10^3 på den logaritmiske skalaen?
For eksempel har tierpotensene 10^2 og 10^3 samme plass på den logaritmiske skalaen som eksponentene 2 og 3 har på den lineære skalaen.
Hver gang vi går én lengdeenhet til høyre på den logaritmiske skalaen blir verdien 10 ganger så stor.

Hvor skal vi plassere 50 på den logaritmiske skalaen?
For å avgjøre det skriver vi 50 som en potens av 10:

$$50 = 10^{\lg 50} = 10^{1,7}$$

Vi plasserer 50 på den logaritmiske skalaen på samme plass som $\lg 50 = 1,7$ har på den lineære skalaen, se figuren.

NB! På en logaritmisk skala har tallet p samme plass som $\lg p$ har på den tilsvarende lineære skalaen.



En mattelærer ser seg i et «logaritmisk speil»

Siden bare positive tall har logaritme, har ikke en logaritmisk skala origo i vanlig forstand.
Men vi kan se på plassen til tallet 1 på den logaritmiske skalaen som et naturlig referansepunkt siden dette svarer til origo på den tilsvarende lineære skalaen.
Vi merker oss at tallet $50 = 10^{1,7}$ plasseres 1,7 lengdeenheter til høyre for referansepunktet.

På figur 2.18 har vi tegnet «nå» ved $5 \cdot 10^{17}$ s, som er universets alder i dag. Kontroller at vi har merket av «nå» riktig på den logaritmiske skalaen!

2.36 – 2.38

Koordinatsystem med logaritmisk skala for andreaksen

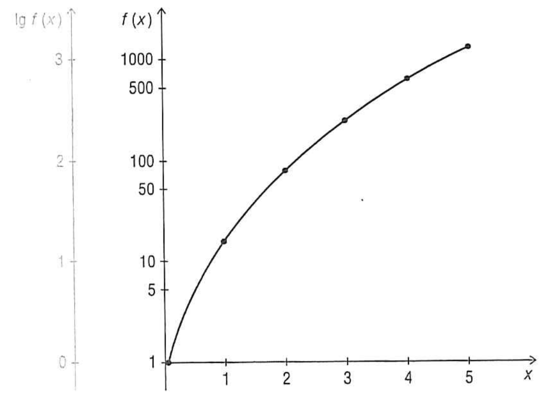
Har du lagt merke til at det kan være vanskelig å lese av grafer til eksponentialfunksjoner?
Et eksempel er Martes lønnsfunksjon på figur 2.6 på side 45.
Du kan knapt se at lønna vokser i starten. Mens i den andre enden av grafen – for eksempel etter 1300 dager – vokser grafen veldig raskt.
Problemet kommer av at det er så stor forskjell mellom lønna til Marte den første tiden og den lønna hun får etter hvert.
En løsning på problemet kan være å tegne grafen til Martes lønnsfunksjon i et koordinatsystem med logaritmisk skala for andreaksen.
Før vi gjør det, ser vi på et eksempel som viser framgangsmåten.

Eksempel 1

Tegn funksjonen $f(x) = (x+1)^4$ på lommeregneren for x-verdier mellom 0 og 5. Du ser at grafen stiger veldig bratt.
Hvordan kan vi tegne grafen til $f(x)$ i et koordinatsystem med logaritmisk skala for andreaksen?
Vi beregner først funksjonsverdien og logaritmen til denne for noen verdier av x:

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	16	81	256	625	1296
$\lg f(x)$	0	1,20	1,91	2,41	2,80	3,11

Vi merker så av punktene $(x, f(x))$ i et koordinatsystem hvor det er logaritmisk skala på andreaksen, se figur 2.20.
Til hjelp når vi merker av punktene, har vi tegnet den tilsvarende lineære andreaksen.
Punktene $(x, f(x))$ skal ha samme plassering i forhold til den logaritmiske skalaen som punktene $(x, \lg f(x))$ har i forhold til den tilsvarende lineære skalaen.



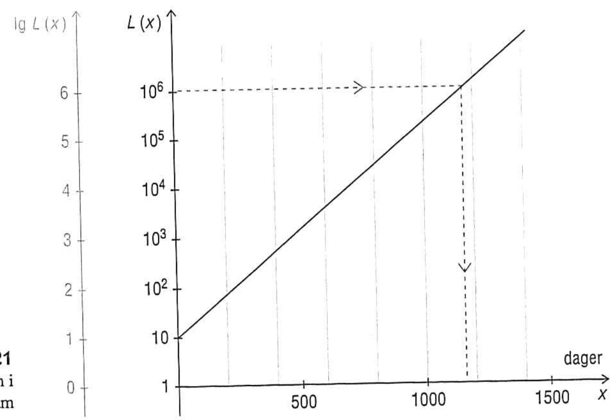
Figur 2.20

Selv om avlesningen blir nokså unøyaktig etter hvert som x vokser, kan vi lese av funksjonsverdier fra 1 til over 1000!
Men *formen* på grafen er misvisende. Den gir inntykk av at $f(x)$ øker mindre etter hvert, og det er jo langt fra tilfelle.

Ved å bruke framgangsmåten i eksempel 1 kan vi tegne grafen til Martes lønnsfunksjon

$$L(x) = 10 \cdot 1{,}01^x$$

i et koordinatsystem med logaritmisk skala for andreaksen.
Resultatet er vist på figur 2.21. Vi kan nå se når Martes lønn kommer over 100 kr, 1000 kr, 10 000 kr, 100 000 kr og 1 000 000 kr.



Figur 2.21
Martes million i logaritmisk diagram

Hva kommer det av at grafen ble en rett linje?
Merk at

$$\lg L(x) = \lg\left(10 \cdot 1{,}01^x\right) = \lg 10 + \lg 1{,}01^x$$

$$= 1 + x \cdot \lg(1{,}01) = 1 + 0{,}00432 \cdot x$$

Hver gang x øker med 1, øker lg $L(x)$ med 0,00432.
Men lg $L(x)$ er det samme som avstanden fra x-aksen opp til punktet $(x\,,\,L(x))$ på grafen.

Hver gang vi går 1 enhet til høyre på grafen, går vi altså 0,00432 opp. Derfor blir grafen en rett linje.
Dette forklarer hvorfor Martes lønnsfunksjon (og alle andre eksponentialfunksjoner) blir en rett linje i et diagram med logaritmisk skala for andreaksen.

OPPGAVER

2.36
Tegn en logaritmisk skala og den tilhørende lineære skalaen, jf. figur 2.19.
Merk av disse tallene på den logaritmiske skalaen:
0,3   8   75   250   700

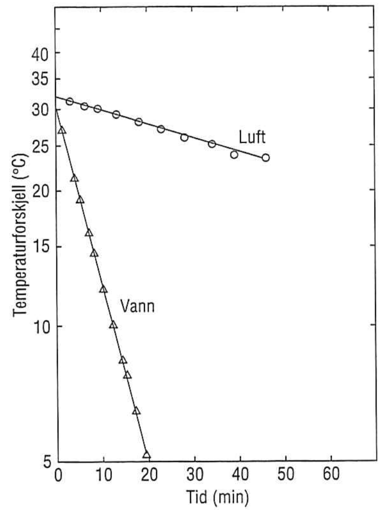
2.37
Tabellen nedenfor viser noen størrelser (i meter).
Merk dem av på en logaritmisk skala.

10^{-18}	Grensen for hva vi kan «se». (Elektroner og kvarker er mindre enn dette)
10^{-15}	Atomkjernens diameter
10^{-10}	Atomradius (middelavstand kjerne – elektroner)
10^{-7}	Ebolavirus
10^{-5}	En bakterie
10^{-2}	En sukkerbit
1,8	En mattelærer
10^3	Et fjell
10^7	Jordas diameter
10^9	Solas diameter, stjerner
10^{11}	Jordas avstand til sola
10^{13}	Solsystemet (avstand sola–Pluto)
10^{16}	Avstand til nærmeste stjerne
10^{21}	Melkeveiens diameter
10^{22}	Avstand til nabogalaksen Andromeda
10^{25}	Avstand til fjerneste galakser – universets «størrelse»

2.38
Lag en tegning av noe du er kjent med, etter modell av tegningen av mattelæreren som ser seg i et «logaritmisk speil» (side 68).

2.39
I starten av en influensaepidemi økte antall smittede etter modellen $F(t) = 1000 \cdot 1{,}15^t$.
Bruk framgangsmåten i eksempel 1 til å tegne grafen i et koordinatsystem med logaritmisk skala for andreaksen.

2.40
Grafen viser avkjølingskurver med logaritmisk skala på andreaksen for like vannflasker med varmt vann i stille luft og i stille vann. Overfør disse grafene til et koordinatsystem med lineær skala på andreaksen.



▲ **2.41**
Et radioaktivt stoff som består av 10^{23} atomer (omtrent 1 mol) har halveringstiden 5730 år.
Etter x år er det $f(x)$ atomer igjen av stoffet.

a Vis at $f(x) = 10^{23} \cdot 0{,}999\,879^x$.

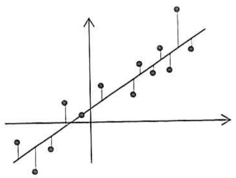
b Skisser en graf som viser antall gjenværende atomer av det radioaktive stoffet som funksjon av tiden fra i dag og til det bare er «ett» atom igjen. Hvor lang tid har det gått når det er igjen «ett» atom?

2.42
En ny BMW koster 450 000 kr. Vi regner med at verdien vil minke med 15 % per år.

a Tegn en graf med logaritmisk andreakse som viser hvordan verdien endrer seg.

b Finn av grafen når verdien er 2500 00 kr, 100 000 kr og 50 000 kr.

2.7 LOGARITMER OG REGRESJON



Figur 2.22
Det er summen av kvadratene til disse avstandene som lommeregneren gjør minst mulig.

I grunnkurset brukte vi regresjon for å finne «det beste» funksjonsuttrykket til punkter som er avsatt i et koordinatsystem.
Vi så spesielt på lineær regresjon og eksponentiell regresjon.

Lineær regresjon vil si å finne den rette linja som passer «best mulig» til et sett punkter. Linja må gå så nær alle punktene som mulig. Grovt sagt betyr det at *summen* av alle avstandene mellom linja og punktene skal være så liten som mulig. Det er også omtrent slik lommeregneren regner seg fram til «den beste» rette linja, se figur 2.22.

Eksponentiell regresjon

Det er enklere å avgjøre om et sett punkter passer bra med en rett linje, enn det er å avgjøre om et sett punkter passer med en eksponentialfunksjon.
Vi skal nå vise hvordan vi kan bruke dette når vi skal avgjøre om et sett tallpar i en tabell passer med en eksponentialfunksjon.

Litt skjematisk går vi fram slik:
- Vi bytter ut tallene i tabellen på en bestemt måte. Hvis tallene i den nye tabellen passer bra med en rett linje, vil de opprinnelige tallene passe bra med en eksponentialfunksjon.
- Vi finner den rette linja som passer best mulig til tallene i den nye tabellen.
- Vi bruker likningen for den rette linja til å finne den eksponentialfunksjonen som passer best mulig til tallene i den opprinnelige tabellen.

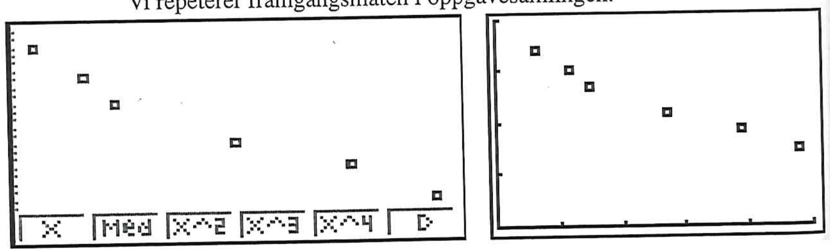
Vi kan si at vi først «oversetter» spørsmålet om eksponentiell regresjon til et spørsmål om lineær regresjon. Så går vi motsatt vei og oversetter resultatet av den lineære regresjonen til en eksponentialfunksjon.

Eksempel 1

Tabellen viser temperaturer under avkjølingen av en 125 ml flaske med vann som er plassert i luft med temperatur 0 °C.

Tid, t (min)	6,3	11,6	14,7	27	39	48
Temperatur, T (°C)	34	30	27	22	19	15

Vi registrerer dataene på lommeregneren og plotter punktene.
Vi repeterer framgangsmåten i oppgavesamlingen.



Figur 2.23

Hva slags funksjon ser ut til å passe best til punktene?
Er det en lineær funksjon eller en eksponentialfunksjon?

Eksempel 2

Vi har mistanke om at tallene i eksempel 1 passer med en eksponentialfunksjon av formen

$$T(t) = C \cdot e^{kt} \qquad (1)$$

Merk at

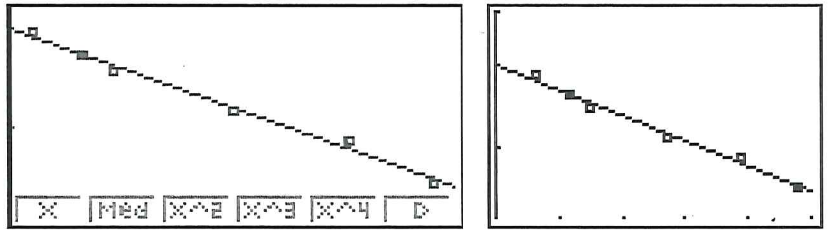
$$\ln T(t) = \ln C + \ln e^{kt}$$

$$\ln T(t) = k \cdot t + c \qquad \text{der } c = \ln C \qquad (2)$$

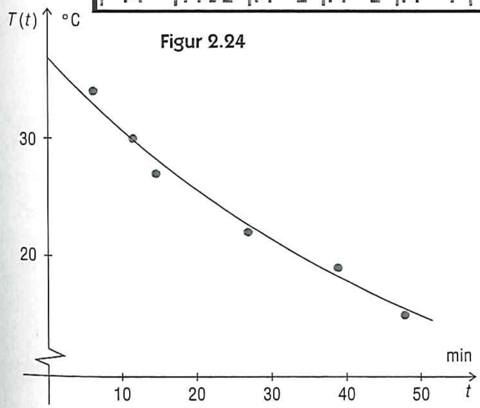
Her er $\ln T(t)$ en lineær funksjon av t.
Hvis tallparene $(t\,,T)$ i eksempel 1 passer godt med en eksponentialfunksjon, vil tallparene $(t\,,\ln T)$ ligge omtrent på en rett linje.
For å avgjøre om dette er tilfellet lager vi en ny tabell hvor temperaturen T er byttet ut med $\ln T$.

Tid, t (min)	6,3	11,6	14,7	27	39	48
$\ln T$	3,53	3,40	3,30	3,09	2,94	2,71

Vi registrerer de nye dataene på lommeregneren og plotter punktene.
Vi tilpasser en rett linje til punktene ved å bruke lineær regresjon.
Da får du figuren nedenfor.



Figur 2.24



Figur 2.25

Det ser ut til at en rett linje passer godt.
Funksjonsuttrykket for linja blir
$\ln T(t) = -0{,}018 \cdot t + 3{,}61$
Sammenhengen mellom temperaturen i vannet og avkjølingstiden t kan dermed beskrives ved eksponentialfunksjonen

$$T(t) = e^{\ln T(t)} = e^{3.61-0.018t}$$

$$= e^{3.61} \cdot e^{-0.018t} = 37 \cdot e^{-0.018t}$$

I eksempel 2 fant vi den eksponentialfunksjonen som best beskriver tallene i eksempel 1 ved å «oversette» til lineær regresjon.
En fordel med å gjøre det på denne måten er at det er lettere å se om en rett linje passer til et sett med tall enn det er å se om en eksponentialfunksjon gjør det.

Du kan kontrollere resultatet ved å bruke eksponentiell regresjon på lommeregneren på de opprinnelige tallene i eksempel 1. Gjør det!

På Casio får du direkte eksponentialfunksjonen i eksempel 2.
På Texas får du eksponentialfunksjonen $37 \cdot 0{,}982^t$.
Men siden

$$37 \cdot 0{,}982^t = 37(e^{\ln 0{,}982})^t = 37e^{-0{,}018t}$$

er dette den samme funksjonen som vi fant i eksempel 2.

Når vi går fram som i eksempel 2, sammenlikner vi tallene i den nye tabellen med en rett linje. Det gir bedre kontroll enn når vi sammenlikner de opprinnelige tallene med grafen til en eksponentialfunksjon.
Vi har også tatt med denne metoden for å gi deg et innblikk i hvordan lommeregneren arbeider.

Dersom $f(x)$ er en eksponentialfunksjon, ligger punktene $(x, \ln f(x))$ på en rett linje.

2.43

Regresjon og potensfunksjoner

Hvis vi har mistanke om at tallene i en tabell passer med en potensfunksjon

$$F(x) = a \cdot x^b \qquad (3)$$

kan vi bruke en liknende framgangsmåte som i eksempel 2.
Merk at

$$\lg F(x) = b \cdot \lg x + \lg a$$

Vi må nå ta logaritmen av både første- og andrekoordinatene til tallparene i den opprinnelige tabellen. (Det spiller ingen rolle om vi tar 10-logaritmen eller den naturlige logaritmen.)
Hvis de opprinnelige tallene passer til en potensfunksjon, vil de nye tallene omtrent ligge på en rett linje.

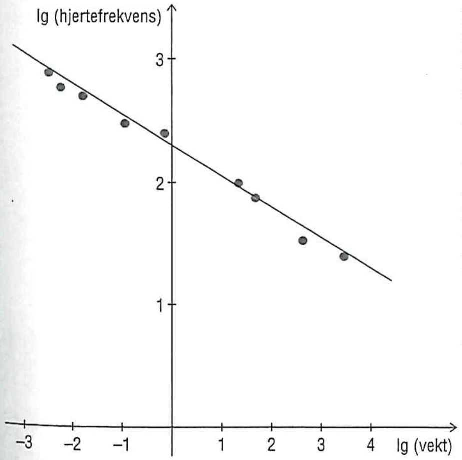
Dersom $F(x)$ er en potensfunksjon, ligger punktene $(\lg x, \lg F(x))$ på en rett linje.

Eksempel 3

Tabellen nedenfor gir gjennomsnittsverdier av vekt og hjertefrekvens for en del pattedyr.

Dyr	Vekt (kg)	Hjertefrekvens (slag per minutt)	lg (vekt)	lg (hjertefrekvens)
Spissmus	0,0035	780	–2,46	2,89
Flaggermus	0,006	590	–2,22	2,77
Mus	0,017	500	–1,77	2,70
Kattunge	0,12	300	–0,92	2,48
Kanin	1,34	250	0,13	2,40
Sel	23	100	1,36	2,00
Sau	50	75	1,70	1,88
Hest	450	34	2,65	1,53
Elefant	3000	25	3,48	1,40

Vi vil undersøke om pattedyrs hjertefrekvens kan framstilles som en potensfunksjon av vekten.



Figur 2.26

I tabellen ovenfor er det kolonnene for vekt og hjertefrekvens som er de opprinnelige tallene. De nye tallene står i kolonnene for lg(vekt) og lg(hjertefrekvens).

Vi plotter lg(hjertefrekvens) mot lg(vekt).

Vi ser at punktene ligger omtrent på en rett linje.
Funksjonsuttrykket for den rette linja som passer best til punktene blir

$$\lg F(m) = -0{,}25 \cdot \lg m + 2{,}3$$

der m er vekten og $F(m)$ er hjertefrekvensen.

Sammenhengen mellom hjertefrekvens og vekt kan dermed beskrives godt ved potensfunksjonen

$$F(m) = 10^{\lg F(m)} = 10^{2{,}3-0{,}25\cdot \lg m} = 10^{2{,}3}\cdot(10^{\lg m})^{-0{,}25} = 200\cdot m^{-0{,}25}$$

Du finner den samme funksjonen ved å ta potensregresjon på lommeregneren direkte med de opprinnelige tallene. Prøv det!
(På grunn av avrundinger vil svaret du får, avvike litt fra det vi fant over.)

En hamster veier 0,1 kg og har en hjertefrekvens på 350 slag per minutt. En gris veier 100 kg og har en hjertefrekvens på 70 slag per minutt. Hvordan stemmer det med potensfunksjonen vår?

Hamster: $m = 0{,}1$ og $F(0{,}1) = 355$

Gris: $m = 100$ og $F(100) = 63$

Dette er slett ikke verst.

OPPGAVER

2.43
Tabellen viser temperaturdifferensen mellom vann og omgivelsene ved forskjellige tidspunkter for to 125 ml-flasker med oppvarmet vann. Den ene er plassert i stille luft og den andre i vind med styrke 3 m/s.

Tid (min)	0	5	10	15	20	25	30
Vindstille	34,9	32,5	30,3	28,2	26,3	24,4	22,9
Vind 3 m/s	33,7	26	20,2	15,7	12,0	9,4	7,1

Vi ser først på målingene for flasken som var plassert i stille luft.

a Sett inn tiden og logaritmen av temperaturdifferensen på hver sin liste i statistikkmenyen på lommeregneren.
b Lag et plott av punktene og utfør en lineær regresjon på dem.
c Bruk funksjonsuttrykket til den rette linja til å bestemme den eksponentialfunksjonen av formen $T(t) = T_0\,e^{kt}$ som best beskriver hvordan temperaturdifferansen endrer seg med tiden.
d Gjør en eksponentiell regresjon direkte på de opprinnelige temperaturmålingene og sammenlikn med det du fikk i oppgave c.
e Gjenta beregningene i oppgavene a–d for flasken som var plassert i vind med styrke 3 m/s. Sammenlikn resultatene for de to tilfellene.

2.44
Hvor godt stemmer potensfunksjonen vi fant i eksempel 3, når det gjelder et «gjennomsnittsmenneske» i forskjellige aldre? Se tabellen.

Alder (år)	5	10	16	25	33	47	60
Vekt (kg)	18	31	66	68	70	72	70
Hjertefrekvens (min^{-1})	96	90	60	65	68	72	70

Kommenter sammenlikningen.

2.8 VÅRE LOGARITMISKE SANSER

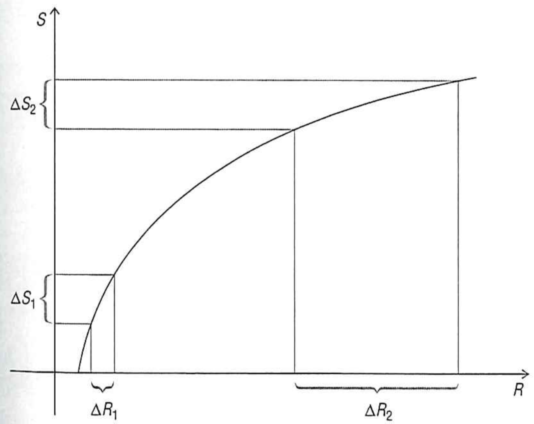
Måler vi den «fysiske» styrken til de signalene våre sanser tar imot, finner vi at signalene har en enorm spennvidde. Det stiller spesielle krav til sansene. Ørene, for eksempel, kan registrere den svake lyden av en sommervind gjennom gresset og drønnet fra et jetfly som tar av. Dette er forbløffende siden drønnet kan ha en effekt som er én billion ganger større enn suset. Slik er det med synet også, og det er omtrent på samme måte med de andre sansene våre. Prisen vi betaler for spennvidden, er at følsomheten avtar med styrken. La oss forklare.

Eksempel 1

Hvor mye veier det?
Tenk deg at du står med bind for øynene og hånda utstrakt. En kamerat legger vekter i en lett skål som ligger i hånda di. Først gjelder det å finne den minste, følbare vekten, deretter den minste vekten som du opplever som en vektøkning. Slik fortsetter det, med hvilepauser, opp til 25 kg.
Når du har 5 g i hånda, kan du føle at det legges på 0,5 g til.
Når du har 5 kg i hånda, merker du ikke at det legges på 0,5 g til. Du merker heller ikke 5 g, men kanskje 50 g, og sikkert 500 g. Dette er typisk for det som kalles *Fechners lov*, som er en god modell for hvordan sansene våre fungerer.
Fechners lov sier at opplevelsen S, det vil si det vi sanser, er proporsjonal med *logaritmen* til stimulansen R,

$$S = k\lg R$$

En slik «stimulansmåler» kan måle det bitte lille veldig nøyaktig, mens det store blir målt mindre nøyaktig.



Figur 2.27 På figuren ser vi at den *opplevde* forskjellen ΔS mellom to stimuli ikke svarer til den fysiske forskjellen i stimulans ΔR. Eksempel: Avstanden mellom to hakk på volumknappen når volumet er lavt svarer til en *mye* mindre stimulansforskjell enn avstanden mellom to hakk ved et høyere volum. Men vi opplever dem som like store!

Eksempel 2

Hørselen vår følger omtrent Fechners lov.

- *Lydnivået* (L) svarer til den lyden vi sanser og måles i desibel (dB). Denne enheten er oppkalt etter oppfinneren av telefonen, Alexander Graham Bell.
- *Lydeffekten* (I) svarer til den fysiske effekten og måles i watt per kvadratmeter (W/m^2).

Lydkilde	Lydnivå (dB)	Lydeffekt (W/m^2)
Jetfly, 30 m	140	100
Smertegrense	130	10
Innendørskonsert	120	1
Skrik i øret, 20 cm	120	1
Hårtørrer	80	$1 \cdot 10^{-4}$
Trafikkstøy i hovedgate	70	$1 \cdot 10^{-5}$
Vanlig samtale, 50 cm	65	$3 \cdot 10^{-6}$
Svak radio	40	$1 \cdot 10^{-8}$
Hvisking	20	$1 \cdot 10^{-10}$
Katt som maler, 50 cm	15	$3 \cdot 10^{-11}$
Sus i sommerløv	10	$1 \cdot 10^{-11}$

Sammenhengen mellom lydnivå og lydeffekt er gitt ved

$$L = 10\lg I + 120 \qquad (1)$$

Den svakeste lyden vi kan oppfatte, gir $L = 0$. Da er $I = 10^{-12}$ W/m^2. Smertegrensen er 130 dB, men «skadegrensen» er lavere.

Av (1) har vi

$$\lg I = \frac{L-120}{10} = 0{,}1L - 12 \qquad (2)$$

Hvis vi øker lydnivået fra 60 dB til 80 dB, øker lydeffekten fra 10^{-6} W/m^2 til 10^{-4} W/m^2 fordi

$$\lg I = 0{,}1 \cdot 60 - 12 = -6 \Rightarrow I = 10^{-6}\ \text{W/m}^2$$

$$\lg I = 0{,}1 \cdot 80 - 12 = -4 \Rightarrow I = 10^{-4}\ \text{W/m}^2$$

Lydeffekten øker altså med en faktor $10^2 = 100$ når lydnivået stiger med 20 dB.

Men hvis far maser med et støynivå på 60 dB og mor også maser med samme støynivå, øker heldigvis ikke *støynivået* til 120 dB. Det er *lydeffekten* som øker til det dobbelte, $2 \cdot 10^{-6}$ W/m^2.

Setter vi $I = 2 \cdot 10^{-6}$ W/m^2 inn i (1), finner vi at lydnivået blir

$$L = 10 \cdot \lg(2 \cdot 10^{-6}) + 120 = 63\ \text{dB}$$

Og økningen fra 60 dB til 63 dB merker du ikke så godt!

OPPGAVER

2.45

Verdensrekorden i skriking innehas av en amerikaner, Simon Robinson. I 1987 skrek han med en effekt på 6,3 W/m^2. Hvor mange desibel er det?

2.46

a En lyd på 150 dB fører til øyeblikkelig døvhet. Hvor stor effekt er det?

b En effekt på 16 MW/m^2 er dødelig for mennesker. Hvor mange desibel er det?

2.47

Lydeffekten I_1 gir lydnivået L_1.
Lydeffekten I_2 gir lydnivået L_2.

a Bruk (1) til å vise at

$$L_2 - L_1 = 10\lg\frac{I_2}{I_1}$$

b Hvis $L_2 - L_1 = 10$, hva er da $\frac{I_2}{I_1}$?

c Hvis $\frac{I_2}{I_1} = 2$, hva er da $L_2 - L_1$?

▲ **2.48**

Vis at effektøkningen som skal til for å heve lydnivået fra 80 til 81 dB, er én million ganger så stor som effektøkningen som skal til for å heve lydnivået fra 20 til 21 dB.

SAMLEOPPGAVER

2.A
Skriv så enkelt som mulig uten å bruke lommeregner.
a $a^2 \cdot a^5$ **b** $\frac{3^3 \cdot 3^7}{3^6}$ **c** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$
d $8^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$

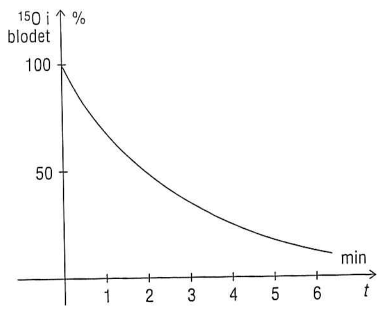
2.B
Et beløp står urørt på en bankkonto med fast rente i 5 år. Kontoen øker i denne perioden fra 125 000 kr til 152 082 kr.
Hvor stor er renten i prosent per år?

2.C
a Finn uttrykt ved lg2 og lg3
1 $\lg 6$ **2** $\lg 18$ **3** $\lg \frac{2}{3}$ **4** $\lg \frac{4}{9}$
b Løs likingen $\lg 6x + \lg \frac{x}{6} = 4$

2.D
Løs likningene.
a $10^x = 108$
b $\lg m = 1{,}13$
c $e^x = 108$
d $\ln z = 1{,}13$
e $\ln x^2 = 1$
f $e^x - 2e^{-x} = 1$

2.E
Funksjonen g er gitt ved
$g(x) = 5 \cdot 2^x, \quad x \in [-4, 2]$.
a Regn ut $g(-4)$, $g(-2)$, $g(0)$ og $g(2)$.
b Tegn grafen til g på lommeregneren.
c Bruk grafen til å løse likningene
1 $g(x) = 2$ **2** $g(x) = 14$
d Løs oppgave c ved regning. Bruk den naturlige logaritmen når du løser c1 og 10-logaritmen når du løser c2.
e Omform $g(x)$ til en eksponentialfunksjon med 10 som grunntall.

2.F
Grafen viser hvor mange prosent ^{15}O som er igjen i blodet t minutter etter en injeksjon. ^{15}O er radioaktivt.
a Finn halveringstiden til ^{15}O.
b La $M(t)$ være antall prosent ^{15}O.
Finn funksjonsuttrykket for $M(t)$.
c **1** Tegn grafen med logaritmisk andreakse.
2 Bruk grafen i oppgave c1 til å finne t når $M(t) = 1\ \%$



2.G
En arbeidsplass med langvarig støynivå over 85 dB er skadelig for hørselen. Piotr og Pierina skal klippe gress en sommer. Motorgressklipperen deres har en lydeffekt på 0,001 W/m² i normal brukeravstand, det vil si 1,5 m.
a Bør de bruke hørselsvern?
b Hvilken lydeffekt svarer 85 dB til?

2.H
I tabellen nedenfor ser du hvordan antall transistorer i en mikroprosessor, i «PC-hjernen», har steget siden 1974.

År	1974	1979	1982	1985	1989	1993	1997	1999
Type mikro-prosessor	8080	8088	80286	80386	80486	P I*	P II*	P III*
Antall transistorer	6000	29 000	134 000	275 000	1,2 mill.	3,1 mill.	7,5 mill.	9,5 mill.

*Pentium

a Plot ln(antall transistorer) som funksjon av antall år etter 1974.
b Utfør lineær regresjon på datapunktene i oppgave a. Tegn regresjonsgrafen sammen med plottet i oppgave a.
c Finn et funksjonsuttrykk for antall transistorer som funksjon av antall år etter 1974. Tegn denne funksjonen sammen med datapunktene i tabellen.
d Moores lov sier at antall komponenter i en prosessor dobles hver 18 måned. Hvordan stemmer dette med funksjonsuttrykket i oppgave c?

SAMMENDRAG

Potensen a^x

Eksponenten x er	Krav til a
positivt helt tall	$a \in R$
null	$a \neq 0$
negativt helt tall	$a \neq 0$
brøk	$a > 0$
irrasjonalt tall	$a > 0$

Potensdefinisjoner

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ faktorer}}$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$a^0 = 1$

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Potenssetninger

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

$(ab)^p = a^p b^p$

$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

$\left(a^p\right)^q = a^{p \cdot q}$

Eksponentialfunksjoner
$f(x) = C_0 \cdot a^x$
a er *grunntallet* eller *vekstfaktoren*.
C_0 er funksjonsverdien når $x = 0$.
a er alltid større enn null.

For $C_0 > 0$ gjelder:
- $f(x)$ er positiv for alle x.
- Hvis $0 < a < 1$, avtar $f(x)$ når x øker.
- Hvis $a > 1$, vokser $f(x)$ når x øker.

10-logaritmen
La p være et positivt tall.
- Hvis $10^x = p$, sier vi at $x = \lg p$
- $10^{\lg p} = p$

Den naturlige logaritmen
La p være et positivt tall.
- Hvis $e^x = p$, sier vi at $x = \ln p$
- $e^{\ln p} = p$

Omforming
$f(x) = C \cdot a^x$
$f(x) = C \cdot 10^{(\lg a)x}$
$f(x) = C \cdot e^{(\ln a)x}$

Noen logaritmesetninger
$\lg a^x = x \lg a$
$\ln a^x = x \ln a$

$\lg(ab) = \lg a + \lg b$
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b$
$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Løsning av eksponentiallikningen $a^x = b$

10-logaritme	*Naturlig logaritme*
$a^x = b$	$a^x = b$
$\lg a^x = \lg b$	$\ln a^x = \ln b$
$x \lg a = \lg b$	$x \ln a = \ln b$
$x = \frac{\lg b}{\lg a}$	$x = \frac{\ln b}{\ln a}$

Regresjon
Hvis tallparene (t, T) passer godt med en *eksponentialfunksjon*, $T(t) = C \cdot e^{kt}$, vil tallparene $(t, \ln T)$ ligge omtrent på en rett linje.

Hvis tallparene (x, F) passer godt med en *potensfunksjon*, $F(x) = a \cdot x^b$, vil tallparene $(\lg x, \lg F)$ ligge omtrent på en rett linje.