Huskelapper, samleoppgaver og sammendrag

I begynnelsen av de fleste avsnittene er det en «huskelapp» med de viktigste punktene i avsnittet. Disse huskelappene har en dobbelt funksjon:

- Ved første gangs lesning forteller de hva avsnittet handler om.
- Ved repetisjonen kan huskelappene være til hjelp når du vil skaffe deg en rask oversikt over hva de enkelte avsnittene inneholder.

Til slutt i hvert kapittel har vi tatt med samleoppgaver og sammendrag.
Ved å løse samleoppgavene og lese sammendraget vil du skaffe deg en oversikt over de mest sentrale punktene i kapitlet.

Lommeregneren

Der det har vært aktuelt å forklare bruken av lommeregnere, har vi forklart inntastingen for lommeregnerne Casio og Texas. I oppgavesamlingen har vi tatt med noen forklaringer i tillegg til det som står i læreboka.

Du bør bruke lommeregneren som et pedagogisk hjelpemiddel, spesielt til å kontrollere utregninger knyttet til funksjoner og løsning av likninger og ulikheter.

NB! ..... Under stikkordet *lommeregner* i registeret finner du hvor i læreboka lommeregneren er forklart.

Vi har prøvd å legge forholdene til rette for at du skal få en best mulig innføring i lærestoffet. Men det er din egen innsats som er avgjørende for resultatet. Vi ønsker deg lykke til!

Vi takker kolleger og andre for mange gode forslag og innspill.
En spesiell takk til konsulentene Inge Grythe og Jostein Walle og til redaktøren Inga Stener Olsen.

Forfatterne

INNHOLD

1 HOVEDMOMENT 4a–b

LIKNINGER OG ULIKHETER 8
1.1 Løsning av likninger 9
1.2 En ny type likning 13
1.3 Ulikheter av første grad 16
1.4 Ulikheter av andre grad 22
1.5 Løsning av brøkulikheter ved regning 27
1.6 Grafisk løsning av brøkulikheter 31
1.7 To bevistyper 33
Samleoppgaver. Sammendrag 36–37

2 HOVEDMOMENT 4c–e

EKSPONENTIALFUNKSJONER OG LOGARITMER 38
2.1 Vi regner med potenser 39
2.2 Eksempler på eksponentiell vekst 42
2.3 10 som grunntall – 10^x og lg x 49
2.4 e som grunntall – e^x og ln x 55
2.5 Noen setninger om logaritmer 58
2.6 Logaritmisk skala 67
2.7 Logaritmer og regresjon 72
2.8 Våre logaritmiske sanser 77
Samleoppgaver. Sammendrag 80–81

3 HOVEDMOMENT 3a, b, f

TRIGONOMETRI 82
3.1 Et tilbakeblikk 83
3.2 Sinus og cosinus på gradskiva 88
3.3 Sinus og cosinus for vinkler i intervallet [0° , 180°] 89
3.4 Arealet av en trekant 93
3.5 Sinussetningen 95
3.6 Cosinussetningen 98
3.7 Vinkler ved dreining 101
3.8 Sinus og cosinus til vinkler i første omløp 104
3.9 Hva med tangens? 109
3.10 Eksempler på trigonometriske funksjoner som modeller 113
Samleoppgaver. Sammendrag 116–117

4 HOVEDMOMENT 5a–e, h

DERIVASJON 118
4.1 Tilbakeblikk 119
4.2 Grenseverdi og kontinuitet 122
4.3 Den deriverte 126
4.4 Derivasjon av et flerleddet uttrykk 131
4.5 Den deriverte ved drøfting av funksjoner 133
4.6 Noen praktiske tolkninger av den deriverte 139
4.7 Den andrederiverte og krumning av kurver 146
4.8 Den deriverte av et produkt, en brøk og sammensatte funksjoner 152
4.9 Den deriverte av e^x og $\ln x$ 160
Samleoppgaver. Sammendrag 166–167

5 HOVEDMOMENT 6a–c

SANNSYNLIGHETSREGNING OG KOMBINATORIKK 168
5.1 Tilbakeblikk 169
5.2 Betinget sannsynlighet og uavhengige hendelser 174
5.3 Produktsetningen 178
5.4 Total sannsynlighet og Bayes' setning 182
5.5 Kombinatorikk 186
5.6 Ordnet utvalg med og uten tilbakelegging 188
5.7 Uordnet utvalg uten tilbakelegging 193
5.8 Hypergeometriske sannsynligheter 197
5.9 Binomiske sannsynligheter 200
Samleoppgaver. Sammendrag 204–205

6 HOVEDMOMENT 3c–f

VEKTORER 206
6.1 Når 25 N + 25 N = 25 N 207
6.2 Vektorer 209
6.3 Vi adderer vektorer 213
6.4 Å trekke fra en vektor 216
6.5 Dekomponering av vektorer 217
6.6 Skalarprodukt 219
6.7 Vektorkoordinater 224
6.8 Regneregler for vektorkoordinater 228
6.9 Skalarprodukt på koordinatform 232
6.10 Ortogonale vektorer 237
6.11 Parameterframstilling 239
6.12 Regning med parametere 243
Samleoppgaver. Sammendrag 250–251

7 HOVEDMOMENT 5f–i

INTEGRASJON 252
7.1 Tilbakeblikk 253
7.2 Det bestemte integralet 255
7.3 Det ubestemte integralet 260
7.4 Bestemt integral ved antiderivering 266
7.5 Analytisk og numerisk metode 274
7.6 Utviklingen av differensial- og integralregningen 278
Samleoppgaver. Sammendrag 282–283

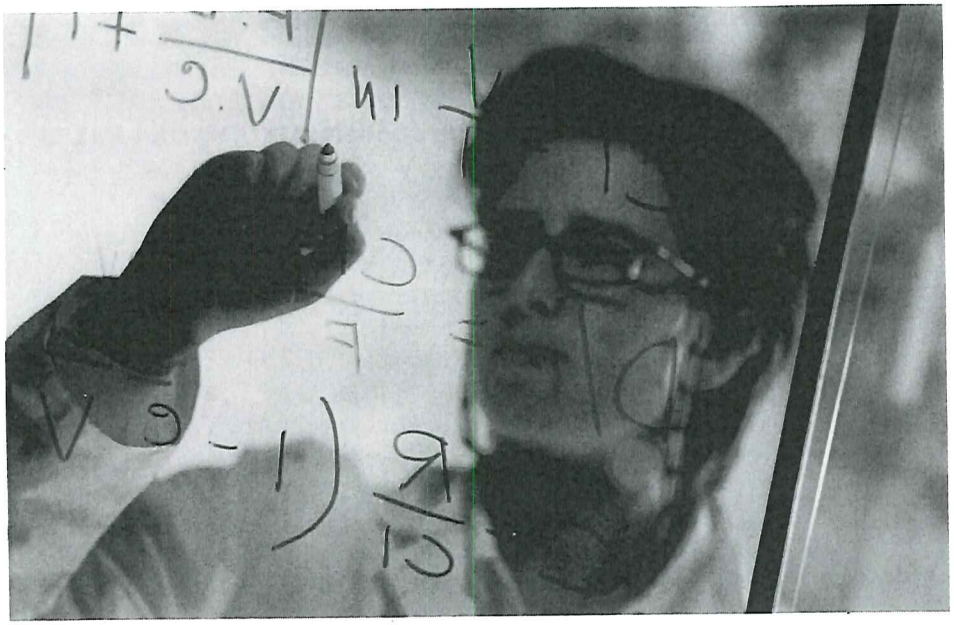
FASIT 284

UTDRAG FRA LÆREPLANEN I MATEMATIKK 2MX 297

REGISTER 300

1 LIKNINGER OG ULIKHETER

HOVEDMOMENT
4a–b



For 4000 år siden koste babylonerne seg med å løse andregradslikninger. På 1500-tallet fant Niccolo Tartaglia en metode for å løse tredjegradslikninger – akkurat tidsnok til å vinne en konkurranse i likningsløsning.
Noen år seinere fant Lodovico Ferrari en metode for å løse fjerdegradslikninger.

I over 200 år forsøkte man så å finne en løsningsmetode for femtegradslikninger. Ikke fordi noen hadde praktisk bruk for dette, men fordi selve problemet var «vakkert og vanskelig».

Jakten på formelen fikk en brå slutt i 1826 da den 24 år gamle Niels Henrik Abel beviste at det ikke fins noen generell løsning for femtegradslikninger. Oppdagelsen vakte stor oppsikt og plasserte Norge på matematikkens verdenskart. Dette var bare én av Abels mange bemerkelsesverdige matematiske oppdagelser. Abel døde av tuberkulose 26 år gammel, akkurat på terskelen til sitt store gjennombrudd.

Hva med likninger av høyere grad enn fem? Ikke prøv deg! Den 20 år gamle Evariste Galois beviste i 1831 at det heller ikke fins en generell løsning for likninger av høyere grad enn fem. Galois døde på sin 21-årsdag etter en duell. Duellens motiv skal ha vært en ung dame, Stéphanie, men politikk kan også ha hatt en finger på avtrekkeren.

1.1 LØSNING AV LIKNINGER

Hva er egentlig en likning?
Etter alle de likningene du har løst, synes du vel at spørsmålet virker dumt, eller i alle fall overflødig.
Men likevel: Hva er egentlig en likning?
Svaret kan formuleres på flere måter, for eksempel denne:
En likning med én ukjent er et utsagn (eller en opplysning) som på en indirekte måte sier hvor stor den ukjente er.
For eksempel kan vi tenke oss at Per skriver et tall på en lapp og sier: «Hvis vi legger 1 til $\frac{1}{3}$ av tallet, får vi 4 minus $\frac{2}{3}$ av tallet.»
Kaller vi tallet x, kan Pers utsagn skrives slik:

$$\frac{x}{3}+1 = 4-\frac{2x}{3}$$

Å løse likningen er å finne den verdien x må ha for at venstresiden i likningen skal bli lik høyresiden.

En likning kan ofte løses på flere måter. Men du har kanskje erfart at det er lurt å følge en bestemt framgangsmåte, en *algoritme*, når du løser en likning ved regning.

Her er en algoritme som passer for førstegradslikninger:

1 Multipliser ut eventuelle parenteser.
2 Hvis likningen inneholder brøker: Finn fellesnevneren og multipliser begge sider av likningen med den.
3 Forkort brøkene.
4 Flytt alle x-leddene over på den ene siden og alle tallene over på den andre siden. Husk å skifte fortegn.
5 Trekk sammen på begge sider.
6 Divider på begge sider med det tallet som står foran x.

Vi skal bruke denne algoritmen på likningen ovenfor.

$$\frac{x}{3}+1 = 4-\frac{2x}{3} \quad (1)$$

punkt 2

$$\frac{x}{3}\cdot 3+1\cdot 3 = 4\cdot 3-\frac{2x}{3}\cdot 3 \quad (2)$$

punkt 3

$$x+3 = 12-2x \quad (3)$$

punkt 4

$$x+2x = 12-3 \quad (4)$$

punkt 5

$$3x = 9 \quad (5)$$

punkt 6

$$x = 3 \quad (6)$$

De seks likningene fra (1) til (6) er seks utsagn som egentlig sier det samme om x.
Utsagn (6) sier direkte at x er lik 3.
Utsagn (5) sier at $3x = 9$, osv.

Selv om de seks utsagnene har ulike formuleringer, gir de den samme opplysningen om hvor stor x er. Vi sier at de seks utsagnene er *ekvivalente*.

Vi omformet den gitte likningen (1) ovenfor slik at likningene (1)–(6) er ekvivalente. Derfor er $x = 3$ løsningen på likning (1). Vi sier at det går ekvivalens fra (1) til (6).

Sette prøve

For å kontrollere svaret kan vi sette prøve. Det gjør vi ved å regne ut venstre og høyre side for $x = 3$ i den opprinnelige likningen, likning (1), for å se om vi får samme svar. Vi kaller sidene VS og HS.

$$\text{VS} = \frac{x}{3}+1 = \frac{3}{3}+1 = 2$$

$$\text{HS} = 4-\frac{2x}{3} = 4-\frac{2\cdot 3}{3} = 2$$

Vi ser at VS = HS. Det viser at $x = 3$ er løsning på (1).

Når vi bruker punktene 1, 3 eller 5 i algoritmen, forenkler vi bare på hver side.

Å flytte over ledd er egentlig det samme som å legge til eller trekke fra det samme på begge sider. Grunnlaget for algoritmen på side 9 er derfor følgende regler:

- Vi kan legge til eller trekke fra det samme på begge sider. (Det er i praksis det vi gjør når vi «flytter over ledd og skifter fortegn».)
- Vi kan multiplisere eller dividere med det samme på begge sider. Men det forutsetter at det vi multipliserer og dividerer med, ikke er null.

1.1 Når vi bruker disse reglene, vil alle likningene vi får under løsningsprosessen være ekvivalente.

Eksempel 1

Vi vil løse likningen $\frac{2x}{x-3}-1 = \frac{6}{x-3}$. (7)

Nevneren i en brøk kan ikke være null. Det er derfor utelukket på forhånd at x kan være 3.

$$\frac{2x}{x-3}-1 = \frac{6}{x-3}$$

Fellesnevneren er $x-3$

$$\frac{2x\cdot(x-3)}{x-3}-1\cdot(x-3) = \frac{6\cdot(x-3)}{x-3}$$

$$\frac{2x\cdot\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}-1(x-3) = \frac{6\cdot\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}$$

$$2x-x+3 = 6$$

$$x = 3$$

Under forutsetning av at $x \neq 3$, er de fem likningene ekvivalente. (Se nederste punkt i rammen ovenfor.) Men under denne forutsetningen er det ingen tall som passer i noen av likningene. Likning (7) har derfor ingen løsning.

Eksempel 1 illustrerer en regel som det er viktig å merke seg.

1.2 Når en likning inneholder én eller flere brøker med x i nevneren, kan x ikke ha verdier som gjør at nevneren blir null.

Eksempel 2

Vi vil nå kommentere en feil som er fort gjort å gjøre når vi løser likninger. Vi tar for oss likningen

$$(x-2)(x+5) = 3(x-2)$$

Her er det fristende å dividere begge sider med $(x-2)$.
Men hva skjer da?

Vi skal gi deg svar på det, men først løser vi likningen på «vanlig» måte.

$$(x-2)(x+5) = 3(x-2) \quad (8)$$

$$x^2+3x-10 = 3x-6 \quad (9)$$

$$x^2 = 4 \quad (10)$$

$$x = -2 \text{ eller } x = 2 \quad (11)$$

Det går ekvivalens fra (8) til (11). Derfor er både –2 og 2 løsninger på likning (8).

Hvis du hadde falt for fristelsen og dividert likning (8) med $x-2$, ville du ha fått

$$x+5 = 3$$

som bare har –2 som løsning.

I eksemplet så du at vi mister en løsning ved å dividere med noe som kan være null. Dette illustrerer betydningen av den nederste regelen i ramma på side 11, som sier at vi kan dividere med det samme i en likning, *forutsatt* at det vi dividerer med, ikke er null.

Lommeregneren som kontroll

NB!

Når du skal løse likninger ved regning, kan det være lurt å kontrollere svaret ved å løse likningene grafisk på lommeregneren. Det er spesielt viktig å kontrollere når du foretar overganger hvor du er usikker på om det er ekvivalens eller ikke.

OPPGAVER

1.1
Løs likningene. Sett prøve på svarene.

a $3(x-4) = 8-2x$

b $7-(5x-9) = 15+2(5-x)$

c $\frac{3}{2}x-5 = \frac{x}{6}$

d $\frac{3}{x-2} = \frac{2}{x+3}$

e $1-\frac{4-x}{x+2} = \frac{x}{x+2} - \frac{5+2x}{x+2}$

f $\frac{x+3}{x-2} - \frac{1-x}{x} = 2$

▲ **1.2**
Løs likningene. Sett prøve på svarene.

a $\frac{3x}{x-2} - 1 = \frac{6}{x-2}$

b $3-\frac{2x}{x-4} = \frac{16}{x-4}$

c $\frac{3}{x(x-1)} = \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x}$

d $1-\frac{x}{x-2} = \frac{-4+x}{(x-1)(x-2)}$

1.3
Løs likningene.

a $(x+4)(2x-3) = (x+4)(x+2)$

b $(x^2-4x)x = 12x$

Kontroller svarene ved å løse likningene grafisk.

1.2 EN NY TYPE LIKNING

Løsning av irrasjonale likninger
1 Først sørger vi for å få rottegnet alene på den ene siden.
2 Så kvadrerer vi begge sider i likningen.
3 Vi løser den likningen vi får etter kvadreringen.
4 Til slutt må vi prøve om løsningene til den siste likningen også passer i den opprinnelige likningen.

Vi vil løse likningen

$$4-x = \sqrt{10-x}$$

En likning som inneholder et kvadratrottegn med den ukjente under rottegnet, kalles en *irrasjonal* likning.
Vi kan ikke bruke algoritmen på side 9 for å omforme denne likningen. Men vi kan prøve å løse likningen grafisk på lommeregneren.

Grafisk løsning på lommeregneren

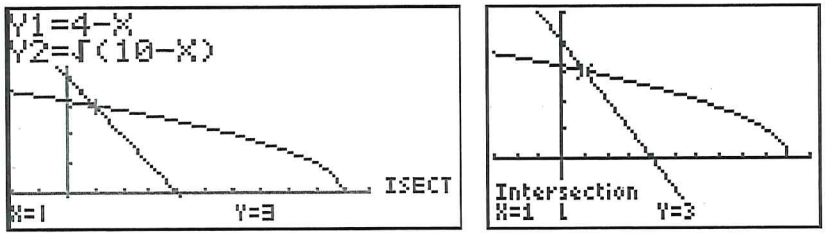
Vi setter

$$y1 = 4-x$$

$$y2 = \sqrt{10-x}$$

Husk parentes om radikanden 10 – x på lommeregneren.

og tegner grafene i samme bilde på lommeregneren.



Figur 1.1

Av figuren ser vi at grafene skjærer hverandre i punktet (1 , 3).
Det viser at $x = 1$ er løsning på likningen.

Du ser at grafen til y2 stopper ved $x = 10$. Det kommer av at y2 ikke er definert for x-verdier større enn 10. Hvorfor?

Løsning ved regning

$$4-x = \sqrt{10-x} \quad (1)$$

Hvis $4-x$ skal være lik $\sqrt{10-x}$, må kvadratet av $4-x$ være lik kvadratet av $\sqrt{10-x}$.
Alle verdier for x som passer i likning (1), må derfor også passe i likningen

$$(4-x)^2 = \left(\sqrt{10-x}\right)^2 \quad (2)$$

Vi omformer likning (2).

$$16 - 8x + x^2 = 10 - x \qquad (3)$$

$(\sqrt{k})^2 = k$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$a = 1,\ b = -7$ og $c = 6$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$x = 1 \text{ eller } x = 6 \qquad (4)$$

Av (4) ser det ut som om likningen $4 - x = \sqrt{10 - x}$ har to løsninger, $x = 1$ og $x = 6$. Men den grafiske løsningsmetoden viste at likningen bare har én løsning, $x = 1$.
For å undersøke dette nærmere setter vi *prøve*:

- Vi prøver med $x = 1$.
  VS $= 4 - x = 4 - 1 = 3$
  HS $= \sqrt{10 - x} = \sqrt{10 - 1} = 3$
  Vi ser at VS = HS. $x = 1$ er en løsning.
  Det stemmer med den grafiske løsningen.
- Vi prøver med $x = 6$.
  VS $= 4 - x = 4 - 6 = -2$
  HS $= \sqrt{10 - x} = \sqrt{10 - 6} = \sqrt{4} = 2$
  Vi ser at VS $\neq$ HS. Det viser at $x = 6$ *ikke* er løsning.
  Det stemmer også med den grafiske løsningen.

Etter å ha satt prøve ender vi altså opp med at $x = 1$ er løsning på likning (1).

Rodin: Tenkeren

Hvor i omformingen av likningene fra (1) til (3) ble «en ekstra løsning» smuglet inn?
Slike «ekstra løsninger» blir ofte kalt *falske løsninger.*
Sett prøve for $x = 6$ i likningene (1) og (2). Hva ser du?

Implikasjon mellom likninger

Prøven ovenfor viser at likning (1) bare har løsningen $x = 1$, mens likning (2) har to løsninger: $x = 1$ og $x = 6$. Det viser at (1) og (2) *ikke* er ekvivalente. Vi vil derfor se litt nærmere på overgangen fra (1) til (2).

Hvis vi setter inn et tall som passer i likning (1), må de to sidene i (1) være like. Da må også kvadratene av de to sidene være like, og (2) må stemme.
Det betyr at *hvis* (1) er sann*, må også (2) være sann.
Vi sier at (1) *impliserer* (eller *medfører*) (2).
Dette kan vi skrive (1) $\Rightarrow$ (2).
Pila kalles *implikasjonspil.*

*Når VS og HS i en likning er like for en bestemt verdi av x, sier vi at likningen er sann for denne x-verdien.

Eksempel 1

Vi skal løse likningen $\sqrt{x+6} - x = 4$.
Her står ikke rottegnet alene på den ene siden. Hvis vi kvadrerer slik det står, vil vi få $(x+6) - 2x\sqrt{x+6} + x^2$ på venstre side.
Rottegnet følger altså med på lasset.
For å bli kvitt rottegnet, må vi flytte over $-x$ før vi kvadrerer. Da får vi

$$\sqrt{x+6} = x + 4 \qquad (5)$$

$\Downarrow$ Vi kvadrerer

$$x + 6 = x^2 + 8x + 16 \qquad (6)$$

$$x^2 + 7x + 10 = 0$$

$$x = -2 \text{ eller } x = -5 \qquad (7)$$

Kontroller at det bare er -2 som er løsning.

I eksemplet ovenfor satte vi implikasjonspil mellom (5) og (6) for å markere at (5) impliserer (6).
Når det bare går implikasjon fra (5) til (6), går det også bare implikasjon fra (5) til (7), selv om de tre siste linjene er ekvivalente.

Når vi løser en likning på en slik måte at det bare går implikasjon fra den likningen vi starter med til det svaret vi får, må vi sette prøve.

Den prøven vi da setter, er ikke først og fremst en kontroll av at vi har regnet riktig. Prøven er en del av selve løsningsmetoden.
Vi må sette prøve på irrasjonale likninger fordi kvadreringen kan gi oss falske løsninger.

Oppsummering

Du er kanskje forvirret av alle fallgruvene vi har støtt på ved løsning av likninger, men strengt tatt er det ikke flere enn tre.
Du kan få problemer når du

- multiplisererer med noe som kan være null
- dividerer med noe som kan være null
- kvadrerer en likning

I første punkt kan du få en falsk løsning, se eksempel 1 side 11.
I andre punkt kan du miste en løsning, se eksempel 2 side 11.
I tredje punkt kan du få en falsk løsning, se eksempel 1 ovenfor.

OPPGAVER

1.4
Løs likningene grafisk og ved regning.

a $\sqrt{x-5}=2$

b $\sqrt{x^2-9}=4$

c $\sqrt{1-3x}=2x$

d $3-x=\sqrt{x-1}$

e $\sqrt{1-3x}=2-2x$

▲ **1.5**
Løs likningene ved regning.

a $1-\sqrt{6x-14}=x$

b $2=x-\sqrt{2x-1}$

c $4-x=2\sqrt{3x-5}$

d $x-4=2\sqrt{3x-5}$

▲ **1.6**
Avstanden d mellom to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) i planet er gitt ved formelen

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Finn y når avstanden mellom punktene (2 , 4) og (5 , y) er 13.

1.3 ULIKHETER AV FØRSTE GRAD

$5x > 15$	$-4x > 28$
$x > 3$	$x < -7$

Elevrådet ved Vennli skole vil arrangere en skolefest. De har kommet fram til at det vil koste 4200 kr å arrangere festen (musikk, leie av vakter, osv.). Inngangsbilletten skal koste 70 kr.
Hvis det kommer x elever, vil elevrådet få et overskudd på $O(x)$ kr, gitt ved $O(x) = 70x - 4200$.

Overskuddet av festen skal gå til elevrådsarbeid. Eline, som er elevrådsleder, er interessert i å finne ut hvor mange elever som må komme for at overskuddet skal bli større enn 5000 kr.
Hun må da løse ulikheten

$$O(x) > 5000$$

Dette kan skrives

$$70x - 4200 > 5000 \qquad (1)$$

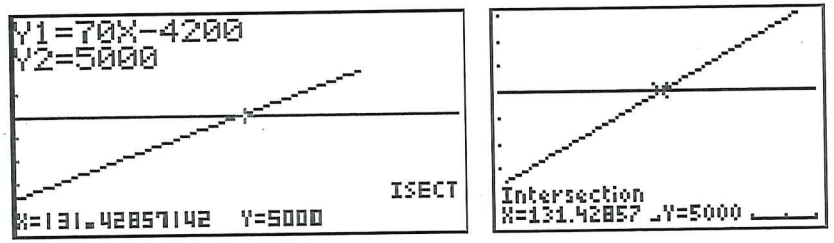
Ulikheten kan løses både ved regning og grafisk på lommeregneren. Eline velger lommeregneren.

Ulikheter på lommeregneren

Eline setter y1 = 70x – 4200 og y2 = 5000 og får ulikheten

y1 > y2

Hun tegner grafene til y1 og y2 på lommeregneren og finner skjæringspunktet mellom dem ved å bruke G-Solve (CALC).



Figur 1.2

Av figuren ser Eline at grafene skjærer hverandre i punktet (131,4 , 5000). Ulikheten stemmer når grafen til y1 ligger over grafen til y2, det vil si for de x-verdiene der grafen til y1 har større y-verdi enn grafen til y2. Det skjer når $x > 131{,}4$.
Det må derfor komme minst 132 elever hvis overskuddet skal bli større enn 5000 kr.
Kontroller svaret ved å regne ut overskuddet hvis det kommer
1 131 elever **2** 132 elever

Ulikheter ved regning

Når vi løser en ulikhet, må vi passe på at de ulikhetene vi får er ekvivalente, slik at de har samme løsninger. Vi skal nå undersøke hvilke regneregler vi kan bruke.

Addisjon og subtraksjon på begge sider

Vi tar for oss ulikheten

$$x - 5 < 12 \qquad (2)$$

Ulikhetstegnet sier at venstresiden skal være mindre enn høyresiden. Når vi legger til 5 på begge sider, er venstresiden fortsatt minst. Da får vi

$$x < 12 + 5 \qquad (3)$$

Omvendt: Dersom (3) stemmer, så stemmer også (2).
(2) og (3) er altså ekvivalente. Dette er et eksempel på en generell regel.

> Vi kan legge til eller trekke fra det samme på begge sider i en ulikhet.

Vi kan altså flytte over ledd og samtidig skifte fortegn, akkurat som ved likninger.

Eksempel 1

Vi skal løse ulikheten $3x + 5 > 7 + 2x$.

$$3x + 5 > 7 + 2x$$
$$3x - 2x > 7 - 5$$
$$x > 2$$

Flytter over 5 og 2x. Skifter samtidig fortegn

Alle tall større enn 2 er løsning.
Ulikheten har altså uendelig mange løsninger.
Mengden av løsninger er det samme som intervallet $\langle 2, \rightarrow \rangle$.
Vi sier derfor at dette intervallet er *løsningsmengden* for ulikheten.

> Som tegn for løsningsmengde bruker vi ofte L.
> I eksempel 1 kan vi skrive $L = \langle 2, \rightarrow \rangle$.
> Løsningsmengde kan også brukes til å gi svar på likninger.

Multiplikasjon og divisjon på begge sider

Vi vil nå se hvordan det går når vi multipliserer eller dividerer med samme tall på begge sider i en ulikhet.

Eksempel 2

Vi ser på ulikheten

$$3 < 5$$

Her vil ulikhetstegnet fortsatt stemme om vi multipliserer med et *positivt* tall på begge sider. Hvis vi for eksempel multipliserer med 4, får vi

$$3 \cdot 4 < 5 \cdot 4$$

Ulikheten stemmer fortsatt.

Hvis vi multipliserer med –4 på begge sider, får vi

$$3 \cdot (-4) < 5 \cdot (-4)$$
$$-12 < -20$$

Dette stemmer *ikke*, for –12 er større enn –20.
Vi må altså snu ulikhetstegnet når vi multipliserer med –4.

Dette gjelder generelt:
Når vi multipliserer med et negativt tall, må vi *snu* ulikhetstegnet.

Forskjellen på å multiplisere med et negativt tall og et positivt tall kan vi vise slik:

	$3 < 5$	$3 < 5$
	$3 \cdot 4 < 5 \cdot 4$	$3 \cdot (-4) > 5 \cdot (-4)$
1.7, 1.8	$12 < 20$	$-12 > -20$

Vi må snu ulikhetstegnet

Den fortegnsregelen vi fant i eksempel 2, gjelder også for divisjon. Altså får vi:

- Når vi multipliserer eller dividerer med et *negativt* tall på begge sider i en ulikhet, må vi *snu* ulikhetstegnet.
- Når vi multipliserer eller dividerer med et positivt tall, skal ulikhetstegnet stå som før.

NB!

Når vi multipliserer med det samme på begge sider i en ulikhet, må vi altså kjenne fortegnet til det vi multipliserer med. Ellers kan vi ikke avgjøre om vi skal snu eller ikke snu ulikhetstegnet.
I ulikheten $\frac{1}{x} < 3$ kan vi altså ikke multiplisere med x uten å vite om x er positiv eller negativ.
Vi skal komme tilbake til en fiks måte å løse slike ulikheter på.

Elines ulikhet

Vi skal nå løse Elines problem ved regning.

$$70x - 4200 > 5000 \qquad (1)$$

$$70x > 5000 + 4200$$

$$x > \frac{9200}{70}$$

$$x > 131{,}43$$

Ulikheten (1) stemmer når $x > 131{,}43$. Det vil igjen si at det må delta minst 132 elever for at overskuddet skal bli større enn 5000 kr.

Eksempel 3

Her er to eksempler der vi dividerer eller multipliserer med et positivt tall:

$3x > 12$ $\qquad$ $\frac{x}{2} < -4$

$\frac{3x}{3} > \frac{12}{3}$ $\qquad$ $\frac{x}{2} \cdot 2 < -4 \cdot 2$

$x > 4$ $\qquad$ $x < -8$

Eksempel 4

Her er to eksempler der vi dividerer eller multipliserer med et negativt tall.

$-3x > 12$ $\qquad$ $-x < 5$

$\frac{-3x}{-3} < \frac{12}{-3}$ $\qquad$ $-x \cdot (-1) > 5 \cdot (-1)$

$x < -4$ $\qquad$ $x > -5$

Av og til bruker vi tegnet $\geq$, som betyr *er større enn eller lik*.
$x \geq 5$ betyr altså at x er lik 5 eller større enn 5.

1.9 Tilsvarende bruker vi $\leq$ for *er mindre enn eller lik*.

Eksempel 5

Loona skal tegne abonnement for mobiltelefon og vurderer to tilbud. Siden Loona bruker mobiltelefon mest om kvelden, ser hun på priser som gjelder etter kl. 1800. Begge tilbudene har en innmeldingsavgift på 200 kr og en startavgift på 0,45 kr for hver samtale. Hun ser derfor bort fra dette når hun skal velge.

- Proff-abonnement
  Hun må betale 249 kr i månedsavgift og 0,89 kr for hvert minutt hun ringer.
- Privat-abonnement
  Hun må betale 50 kr i månedsavgift og 1,99 kr for hvert minutt hun ringer.

Vi setter at Loona ringer x minutter per måned. Totalkostnaden per måned blir da

Tilbud 1: $(0{,}89x + 249)$ kr
Tilbud 2: $(1{,}99x + 50)$ kr

Tilbud 1 er best når $0{,}89x + 249$ er mindre enn $1{,}99x + 50$, det vil si når

$0{,}89x + 249 < 1{,}99x + 50$

$249 - 50 < 1{,}99x - 0{,}89x$

$199 < 1{,}10x$

Dividerer med 1,10

$\frac{199}{1{,}10} < \frac{1{,}10}{1{,}10}x$

$x > 180{,}9$

Ulikheten stemmer når x er større enn 180,9. Det vil si at hvis Loona ringer mer enn 181 minutter per måned, er Proff-abonnementet billigst. (Legg merke til at vi valgte å flytte x-leddene over på høyre side av ulikhetstegnet i linje 2. Kan du tenke deg hvorfor?)

Husk!
Førstegradsulikheter løses på samme måte som førstegradslikninger, med ett unntak:
Vi må snu ulikhetstegnet hvis vi multipliserer eller dividerer med et negativt tall.

OPPGAVER

1.7
Ta for deg ulikheten $-5 < -2$.
Du skal multiplisere med samme tall på begge sider i ulikheten. Undersøk om du må snu ulikhetstegnet når du multipliserer med

a 2 **b** -2 **c** -1
d 0,5 **e** $-0{,}5$

1.8
Ta for deg ulikheten $4 > -2$. Multipliser på begge sider med tallene i forrige oppgave.
I hvilke av tilfellene må du snu ulikhetstegnet?

1.9
Løs ulikhetene. Forklar for hver overgang hvilken regel du bruker.

a $2x - 5 < 3 - 2x$
b $8x - 10 > 3x - 2(2 - x)$
c $3x - 7 > 5x - 3$
d $2x - 5(2x - 4) < 4x + 12$
e $\frac{x}{3} - 5 \leq \frac{x}{2} - 2$
f $\frac{2}{3}(x - 1) + 2 > 2x - \frac{4}{3}$
g $\frac{x}{2} - 3 \geq 3x + \frac{1}{2}(2 - x)$

1.10
For elektrisk energi betaler en familie 0,43 kr per kWh de bruker. I tillegg må de betale en fastavgift på 830 kr per år. Hvor mange kWh kan familien bruke dette året hvis de ønsker å holde elektrisitetsutgiftene under 10 000 kr?

1.11
Eva reiser mye med buss, og hun pleier å kjøpe månedskort. Hun kan da ta bussen så ofte hun vil i én måned. Månedskortet koster 550 kr. Alternativet til månedskort er et klippekort som koster 120 kr for 8 reiser.
Hvor mange ganger i løpet av en måned må hun bruke bussen for at det skal være billigere med månedskort enn med klippekort?
(Tips: La x være antall turer i løpet av en md.)

1.4 ULIKHETER AV ANDRE GRAD

En bedrift har kommet fram til at overskuddet ved salg av en vare er tilnærmet gitt ved

$$O(x) = -x^2 + 160x - 4500$$

der x er prisen per vareenhet og $O(x)$ kr er overskuddet per uke.

Ludvig:
«Overskudd på mer enn 1800 kr. Det er farlig det!»

Solan vil finne ut hva prisen må være for at overskuddet skal bli større enn 1800 kr per uke.
Han må da løse ulikheten

$$O(x) > 1800 \qquad (1)$$

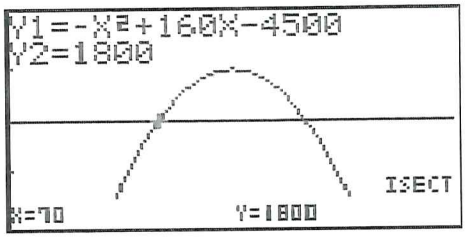
Dette kan skrives

$$-x^2 + 160x - 4500 > 1800 \qquad (2)$$

Grafisk løsning på lommeregneren

Solan velger å løse ulikheten grafisk på lommeregneren.
Han setter y1 = $-x^2+160x-4500$ og y2 = 1800.
(2) kan da skrives

$$y1 > y2 \qquad (3)$$



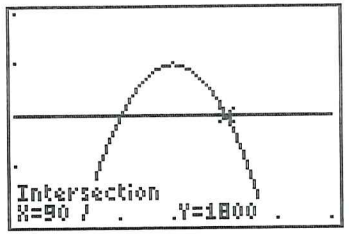


Fig 1.3

Ulikheten (1) stemmer når grafen til y1 ligger over grafen til y2. Solan ser at overskuddet er større enn 1800 kr når prisen ligger mellom 70 kr og 90 kr.

NB!

Vi minner om bruken av automatisk tilpasning av ytterverdier for y på lommeregneren når ytterverdier for x er valgt.
(ZOOM F5 (Auto) på Casio og ZOOM 0 (Zoom Fit) på Texas.)

Løsninger av ulikheter med fortegnsskjema

Når du skal løse en andregradsulikhet ved regning, må du kunne drøfte fortegnet til en funksjon. Som eksempel vil vi drøfte fortegnet til funksjonen

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 6$$

Det vil si at vi skal finne de x-verdiene hvor $f(x)$ er positiv, og de x-verdiene hvor $f(x)$ er negativ. Da må vi faktorisere $f(x)$.

Først finner vi nullpunktene til $f(x)$.

$$f(x) = 0$$
$$2x^2 - 4x - 6 = 0$$
$$x = 3 \text{ eller } x = -1$$

Nullpunkter: 3 og –1
Dette viser at

$$f(x) = 2(x-3)(x+1)$$

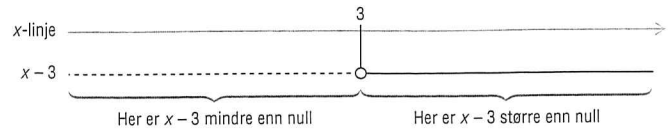
x_1 og x_2 er nullpunkter:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

For å få oversikt tegner vi et *fortegnsskjema* for $f(x)$. Der legger vi inn én *fortegnslinje* for hver av de tre faktorene 2 , $x - 3$ og $x + 1$. Linjene viser oss når hver av de tre faktorene er positiv eller negativ.

Fortegnslinje
For å forklare hva en fortegnslinje er, tegner vi fortegnslinje for faktoren $x - 3$.

- $x - 3$ er null når $x = 3$.
- $x - 3$ er positiv når $x > 3$.
- $x - 3$ er negativ når $x < 3$.

Figur 1.4 på neste side viser fortegnslinja.



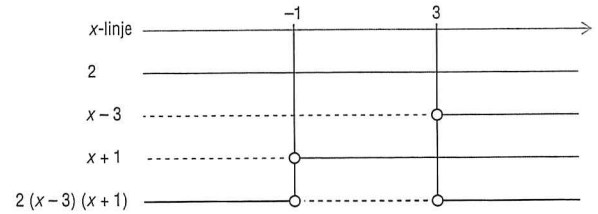
Figur 1.4

Den øverste linja er en tallinje der vi merker av de tallene vi får bruk for.

o markerer at uttrykket er null.
---- markerer at uttrykket er negativt.
—— markerer at uttrykket er positivt.

Fortegnsskjema for f(x)

Vi tegner én fortegnslinje for hver av de tre faktorene og én linje for $f(x)$. Tallfaktoren 2 er alltid positiv. Fortegnslinja for denne faktoren blir da en sammenhengende linje.



Figur 1.5

Når vi skal finne fortegnet til et produkt, er det nok å se på antall negative faktorer.

- Når x er mindre enn -1, er to faktorer negative. Da er $f(x)$ positiv.
- Når x er mellom -1 og 3, er bare én faktor negativ. Da er $f(x)$ negativ.
- Når x er større enn 3, er alle faktorene positive. Da er $f(x)$ positiv.
- Når $x = -1$ og når $x = 3$, er én av faktorene null, og da er $f(x)$ lik null.

Vi får altså at

- $f(x)$ er positiv for $x < -1$ og for $x > 3$
- $f(x)$ er negativ for $-1 < x < 3$
- $f(x)$ er null for $x = -1$ og for $x = 3$

1.12 Skrivemåten $-1 < x < 3$ betyr at x ligger mellom -1 og 3.

Eksempel 1

Vi skal drøfte fortegnet for funksjonen

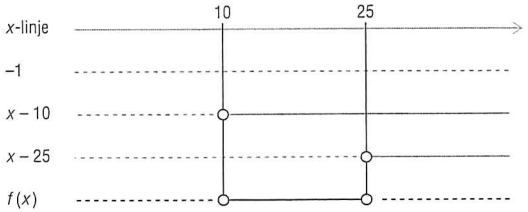
$$f(x) = -x^2 + 35x - 250$$

Først finner vi nullpunktene til $f(x)$ og faktoriserer.

$$f(x) = 0$$
$$-x^2 + 35x - 250 = 0$$
$$x = 10 \text{ eller } x = 25$$

Dette viser at $f(x) = (-1)(x - 10)(x - 25)$

Vi tegner fortegnsskjema.
Faktoren -1 er alltid negativ. Fortegnslinja for denne faktoren er derfor stiplet hele veien.



Figur 1.6

$f(x) > 0$ for $10 < x < 25$
$f(x) < 0$ for $x < 10$ og for $x > 25$

1.13, 1.14a–c Kontroller resultatet ved å tegne grafen til f på lommeregneren.

Eksempel 2

Vi vil drøfte fortegnet for funksjonen $f(x) = -2x^2 + 8x - 14$.
For å finne eventuelle nullpunkter må vi løse likningen $f(x) = 0$.

$$-2x^2 + 8x - 14 = 0$$
$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{-48}}{-4}$$

NB! Likningen har ingen løsning. $f(x)$ kan derfor ikke bli null for noen verdi av x. Det betyr at $f(x)$ er positiv for alle verdier av x eller negativ for alle verdier av x.
For å avgjøre fortegnet velger vi en x-verdi og regner ut $f(x)$.
$f(0) = -14$. $f(x)$ er derfor negativ for alle verdier av x.
Kontroller dette ved å tegne grafen til $f(x)$ på lommeregneren.

Det at $f(x)$ er negativ for alle x, betyr:

- ulikheten $-2x^2 + 8x - 14 < 0$ stemmer for alle verdier av x
- ulikheten $-2x^2 + 8x - 14 > 0$ stemmer ikke for noen verdi av x

Eksempel 3

Vi vil nå løse ulikheten (1) til Solan på side 22 ved regning.

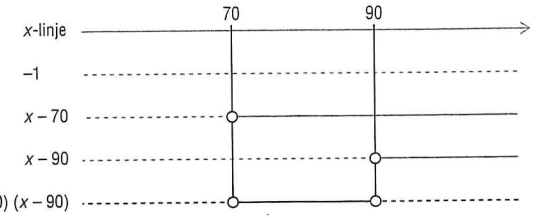
$$O(x) > 1800 \qquad (1)$$
$$-x^2 + 160x - 4500 > 1800$$

NB! Skal vi kunne løse ulikheten med fortegnsskjema, må det stå null på den ene siden av ulikheten.
Vi flytter derfor over 1800 og får

$$-x^2 + 160x - 6300 > 0$$

Vi løser likningen $-x^2+160x-6300=0$ og får løsningene 70 og 90.
Dermed kan vi skrive

$$(-1)(x-70)(x-90) > 0 \qquad (4)$$



Figur 1.7

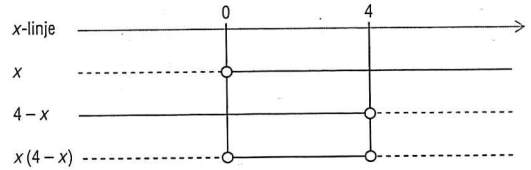
Ulikhetene (1) og (4) er ekvivalente og har samme løsningsmengde.

$O(x) > 1800$ for x-verdier mellom 70 og 90. Overskuddet er større enn 1800 kr for priser mellom 70 kr og 90 kr.

Eksempel 4

Vi skal løse ulikheten $4x < x^2$.
Vi flytter over og får $4x - x^2 < 0$.
Vi må altså drøfte fortegnet til uttrykket $4x - x^2$.
Dette uttrykket kan vi faktorisere slik: $x(4-x)$

- Faktoren x er negativ når x er mindre enn null, og positiv når x er større enn null.
- $4-x$ er positiv når x er mindre enn 4, og negativ når x er større enn 4. Prøv med x lik 3 og x lik 5.



Figur 1.8

Fortegnsskjemaet viser at uttrykket $4x - x^2$ er negativt for $x < 0$ og for $x > 4$, og da stemmer ulikheten $4x - x^2 < 0$. Løsningsmengden til ulikheten $4x < x^2$ er altså

$$L = \langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 4, \rightarrow \rangle$$

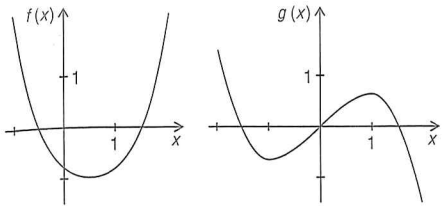
NB! Ved å gå fram som i eksemplene ovenfor kan vi alltid løse en andregradsulikhet, men vi må sørge for å få null på den ene siden.

TIPS!
Vi kan bruke fortegnsskjema når vi skal løse ulikheter der

- et produkt blir sammenliknet med null
- en brøk blir sammenliknet med null (neste avsnitt)

OPPGAVER

1.12



Figuren viser grafene til f og g.
Tegn fortegnslinje for $f(x)$ og $g(x)$.

1.13

a Tegn fortegnsskjema for

1 $(x-2)(x+3)$ **2** $x(x-4)$
3 $4(x-2)(2-x)$ **4** $-2x^2+6x$

b Bruk resultatene i oppgave a til å løse ulikhetene

1 $(x-2)(x+3)<0$ **2** $x(x-4)>0$
3 $4(x-2)(2-x)<0$ **4** $-2x^2+6x<0$

1.14

Løs ulikhetene ved regning.
(Bruk fortegnsskjema.)

a $x^2+3x>0$ **b** $x^2-3x+2 \le 0$
c $-2x^2+6x-4>0$ **d** $x^2-3x \ge -4$
e $x^2+2<x$ **f** $-x^2<3x$

1.15

a Sett opp fortegnsskjema for $3x-15$.
Hva sier dette om grafen til $f(x)=3x-15$?
b Sett opp fortegnsskjema for $8-2x$.
Hva sier dette om grafen til $g(x)=8-2x$?
c Sett opp fortegnsskjema for x^2.
Hva sier dette om grafen til $h(x)=x^2$?

1.16

a Gitt en funksjon $f(x)=x^2-2x-3$.
Bruk fortegnsskjema til å avgjøre når
1 $f(x)>0$ **2** $f(x)<-3$
3 $f(x)>5$
b Ta for deg overskuddsfunksjonen på side 22.
$O(x)=-x^2+160x-4500$, $x \in \langle 50, 110\rangle$.
Finn ved regning hva prisen må være for at overskuddet skal bli større enn 1500 kr.
Finn også svaret grafisk på lommeregneren.

1.5 LØSNING AV BRØKULIKHETER VED REGNING

Løsning av brøkulikheter
1 Vi samler alle leddene på venstre side av ulikhetstegnet.
2 Vi trekker sammen leddene på venstresiden og skriver denne siden som en brøk.
3 Vi faktoriserer brøken og lager fortegnsskjema.

Når vi skal løse ulikheter som inneholder brøker, ved regning, kan det være fristende å multiplisere med fellesnevner, slik du gjør når du løser likninger. Men hvis fellesnevneren er et uttrykk som inneholder x, vil en multiplikasjon kunne føre til at svaret blir galt. Hvorfor?
Vi skal nå vise hvordan vi løser slike ulikheter ved å bruke fortegnsskjema.

Brøkulikheter der den ene siden er null

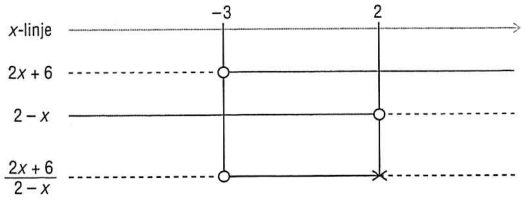
Eksempel 1

Vi skal løse denne ulikheten ved regning:

$$\frac{2x+6}{2-x} < 0$$

NB! Ikke la deg friste til å multiplisere med $2-x$.

I ulikheten blir brøken sammenliknet med null. Derfor kan vi løse ulikheten ved å tegne fortegnsskjema for brøken.
En brøk er negativ hvis teller og nevner har motsatt fortegn. Den er positiv hvis teller og nevner har samme fortegn.



Figur 1.9

NB! Legg merke til fortegnslinja for $2-x$.

Brøken er ikke definert for $x = 2$, for da blir det null i nevner. Dette har vi markert ved å sette × på fortegnslinja til brøken.

Ulikheten stemmer når brøken er mindre enn null. Fortegnsskjemaet viser at brøken er mindre enn null for alle tall i intervallet $\langle \leftarrow, -3\rangle$ og for alle tall i intervallet $\langle 2, \rightarrow\rangle$.
Løsningsmengden er derfor unionen av de to intervallene.

1.17 $L = \langle \leftarrow, -3\rangle \cup \langle 2, \rightarrow\rangle$

Brøkulikheter som må omformes

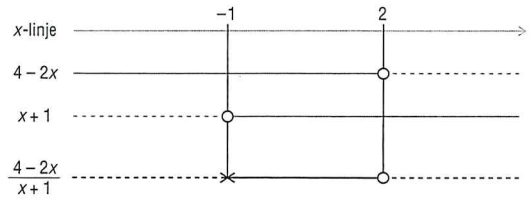
Vi skal løse uliheten

$$\frac{5-x}{x+1} > 1 \qquad (1)$$

NB! Her hjelper det ikke å tegne fortegnsskjema for brøken, for det står ikke null på høyre side.
Vi kan heller ikke uten videre multiplisere med $x + 1$ på begge sider av ulikhetstegnet, for vi vet ikke om $x + 1$ er større eller mindre enn null, og da vet vi ikke om vi skal snu ulikhetstegnet.

Men vi kan løse ulikheten ved å gå fram slik:

- Vi sørger for å få null på høyre side:
$$\frac{5-x}{x+1} - 1 > 0$$
- Vi utvider for å få felles nevner:
$$\frac{5-x}{x+1} - \frac{1\cdot(x+1)}{x+1} > 0$$
- Vi trekker sammen venstre side:
$$\frac{4-2x}{x+1} > 0 \qquad (2)$$
- Vi tegner fortegnsskjema for brøken $\frac{4-2x}{x+1}$:



Figur 1.10

Siden det går ekvivalens fra (1) til (2), har (1) og (2) samme løsningsmengde. Derfor stemmer (1) når brøken i (2) er positiv. Ulikheten (1) stemmer for x-verdier mellom –1 og 2.

1.18 a–c $L = \langle -1, 2\rangle$

Eksempel 2

Vi skal løse ulikheten

$$\frac{x+4}{x-2} \geq 2x-2 \qquad (3)$$

- Også her samler vi alt på den ene siden av ulikhetstegnet og trekker sammen til én brøk:

$$\frac{x+4}{x-2} - 2x + 2 \geq 0$$

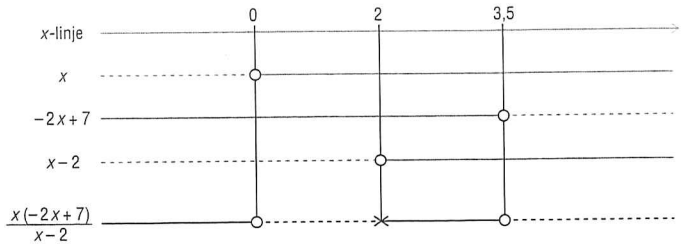
$$\frac{x+4}{x-2} - \frac{2x(x-2)}{x-2} + \frac{2(x-2)}{x-2} \geq 0$$

$$\frac{x+4-2x(x-2)+2(x-2)}{x-2} \geq 0$$

$$\frac{x(-2x+7)}{x-2} \geq 0 \qquad (4)$$

Utfør mellomregningen!

- Vi tegner fortegnsskjema for brøken.



Figur 1.11

Ulikhetene (3) og (4) har samme løsning.

$$L = \langle \leftarrow, 0] \cup \langle 2, 3{,}5]$$

Eksempel 3

Et treningsstudio har en rabattordning for ungdom. Ordningen er slik at man hvert halvår kan kjøpe et kort til 500 kr og så betale 20 kr for hver trening. Uten kort koster én treningstime 50 kr. Mona pleier å kjøpe kort.

Vi vil finne hvor mange ganger Mona må trene på et halvår for at gjennomsnittsprisen skal bli mindre enn 50 kr. Vi må da løse ulikheten

$$\frac{500}{x} + 20 < 50$$

Her står x for antall treningstimer og er derfor et positivt tall. Vi kan altså gange begge sider av ulikheten med x uten å snu ulikhetstegnet.

$$\frac{500}{x} + 20 < 50$$

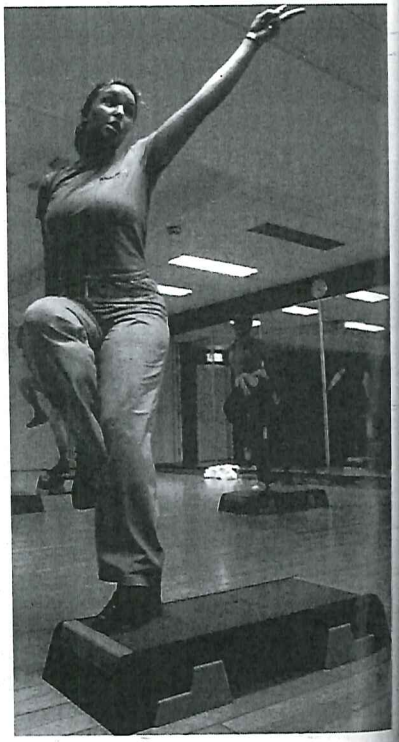
$x > 0$

$$\frac{500 \cdot x}{x} + 20x < 50x$$

$$500 < 30x$$

$$x > 16{,}7$$

Mona må trene minst 17 ganger for at en trening skal koste henne mindre enn 50 kr i gjennomsnitt.



OPPGAVER

1.17

Løs ulikhetene ved regning.

a $\frac{2}{x+3} < 0$ b $\frac{4}{3-x} > 0$

c $\frac{x+4}{4-2x} > 0$ d $\frac{1-3x}{3+2x} \leq 0$

1.18

Løs ulikhetene ved regning.

a $\frac{x+3}{x-2} > 1$ b $\frac{x-1}{x-3} > 2$

c $\frac{1+x}{2x-1} \leq \frac{1}{2}$ d $\frac{x+1}{x-2} < x+1$

▲ 1.19

Løs ulikheten ved regning.

$\frac{4}{x-3} > 2$

Hvorfor kan du her multiplisere med $x - 3$ på begge sider?

1.6 GRAFISK LØSNING AV BRØKULIKHETER

Eksempel 1

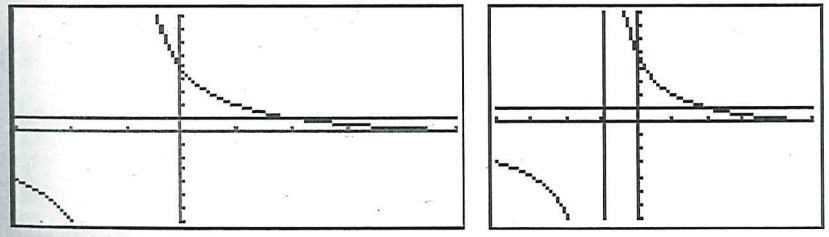
Vi skal løse ulikheten (1) på side 28 grafisk på lommeregneren.

$$\frac{5-x}{x+1} > 1 \qquad (1)$$

Vi setter $y1 = \frac{5-x}{x+1}$ og $y2 = 1$. Ulikheten kan da skrives

$$y1 > y2 \qquad (2)$$

Vi får fram grafene til $y1$ og $y2$ på lommeregneren. De skjærer hverandre for $x = 2$.



Figur 1.12

$y1$ er ikke definert når nevneren i brøken er null. Det er derfor brudd på grafen for $x = -1$.

(2) stemmer når grafen til $y1$ ligger over grafen til $y2$. Det skjer for x-verdier mellom –1 og 2. Løsningen på ulikheten kan da skrives

$$L = \langle -1, 2 \rangle$$

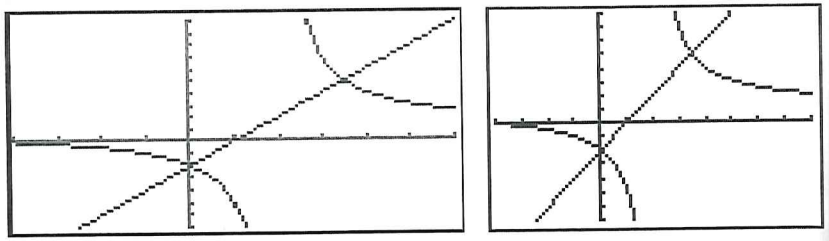
1.20, 1.21 a–c

Eksempel 2

Vi skal løse ulikheten (3) på side 29 grafisk på lommeregneren.

$$\frac{x+4}{x-2} \geq 2x-2$$

Sett y1 = $\frac{x+4}{x-2}$ og y2 = $2x-2$ og få fram grafene til y1 og y2 på lommeregneren. Figuren viser grafene.



Figur 1.13

Forklar at svaret blir

$$L = \langle \leftarrow, 0] \cup \langle 2, 3{,}5]$$

Hva med grafen utenfor bildet?

Når vi tegner grafen til en funksjon på lommeregneren eller på papir, får vi vanligvis bare et utsnitt av hele grafen. Slike utsnitt bruker vi blant annet til å løse likninger og ulikheter. Hvordan kan vi stole på at den løsningsmengden vi finner på denne måten, er riktig?
Hva kan vi vite om grafen utenfor det utsnittet vi har tegnet?
Det er ikke noe problem hvis definisjonsmengden til funksjonen er begrenset slik at vi kan få tegnet hele grafen. Men hvis *det* ikke er tilfelle, må vi være klar over at vi kan bli «lurt» ved grafiske løsninger når vi bare har et utsnitt av grafen. (Jf. oppgave 1.22.)

OPPGAVER

1.20
Løs oppgave 1.17 grafisk på lommeregneren.

1.21
Løs oppgave 1.18 grafisk på lommeregneren.

1.22
Løs ulikhetene grafisk på lommeregneren

a $\frac{x^2}{x-6} > 4$ **b** $\frac{x^3}{x^2-9} \leq 10$

1.7 TO BEVISTYPER

I bevisene nedenfor bruker vi implikasjonspiler for å få bedre oversikt over tankegangen i beviset.
I slike bevis er vi mest interessert i implikasjon, også når det går ekvivalens.

Et bevis bygger alltid på det vi vet fra før, det vil si definisjoner og setninger som er bevist tidligere.

Likevel skiller vi mellom ulike bevistyper.
Vi skal vise eksempler på det vi kaller direkte bevis og indirekte bevis.

Direkte bevis

Vi skal føre et direkte bevis for setningen:

Summen av to rasjonale tall er et rasjonalt tall.

Vi minner om at et rasjonalt tall er et tall som kan skrives som en brøk med hele tall i teller og nevner.

En kortversjon av beviset kan for eksempel se slik ut:
Når vi skal addere to brøker med hele tall i teller og nevner, kan vi utvide brøkene med hele tall slik at de får samme nevner. Brøkene har da fortsatt hele tall i teller og nevner. Når vi setter brøkene på én brøkstrek og trekker sammen telleren, blir svaret en ny brøk med hele tall i teller og nevner. Altså er svaret et rasjonalt tall.

Når vi fører et bevis på denne måten, er det ikke så lett for andre å følge med i tankegangen og kontrollere hver overgang i resonnementet. Noen vil derfor føle seg usikre på konklusjonen.
Ved et slikt kortfattet bevis er det heller ikke så lett å se hvilke overganger som bygger på definisjoner, og hvilke som bygger på tidligere godtatte setninger.
Beviset blir mer oversiktlig når vi fører hver overgang på en egen linje med en implikasjonspil mellom overgangene. Da kan vi også kommentere hver overgang hvis vi ønsker det.

x og y er rasjonale tall (1)

$\Downarrow$ definisjonen på rasjonale tall

$x = \frac{a}{b}$ og $y = \frac{c}{d}$ der a, b, c og d er hele tall

$\Downarrow$

$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

$\Downarrow$ regel om å utvide brøker

$x + y = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db}$

$\Downarrow$ regel om å addere brøker

$x + y = \frac{ad + cb}{bd}$

$\Downarrow$ produktet av to hele tall er et helt tall

$x + y = \frac{e + f}{g}$ der e, f og g er hele tall

$\Downarrow$ summen av to hele tall er et helt tall

$x + y = \frac{h}{g}$ der h og g er hele tall

$\Downarrow$ definisjonen på rasjonale tall

$x + y$ er et rasjonalt tall (2)

Serien av implikasjoner fra (1) til (2) viser at *dersom* x og y er rasjonale tall, så er også $x + y$ et rasjonalt tall.

Det er selvfølgelig ikke nødvendig med så detaljerte forklaringer hver gang vi fører et bevis med implikasjonspiler. Vi har tatt det med her for å vise at hver overgang i resonnementet bygger på en definisjon eller en matematisk setning som er kjent fra før.

Både kortversjonen og det formelle beviset ovenfor er eksempler på *direkte bevis*.
Et direkte bevis er kjennetegnet ved at vi ut fra definisjoner og kjente setninger trekker en kjede med logiske slutninger (implikasjoner) som fører direkte fram til det vi vil bevise.

Indirekte bevis

Vi skal føre et *indirekte bevis* for setningen:

Summen av et rasjonalt tall og et irrasjonalt tall er et irrasjonalt tall.

Vi minner om at et irrasjonalt tall er et tall som *ikke* kan skrives som en brøk med hele tall i teller og nevner.

Lar vi z stå for et irrasjonalt tall og x for et rasjonalt tall, kan setningen formuleres som en påstand p.

p: $z + x$ er et irrasjonalt tall

For å føre et indirekte bevis for p, og dermed for setningen ovenfor, formulerer vi først *negasjonen* til p, det vil si den motsatte påstanden til p. Vi kan kalle den ikke-p.

ikke-p: $z + x$ er et rasjonalt tall

I det indirekte beviset «later» vi som om vi tror at påstanden ikke-p er sann. Så viser vi at den likevel ikke er det fordi påstanden fører til noe vi *vet* er usant.
Vi starter derfor implikasjonskjeden med ikke-p.

$z + x$ er et rasjonalt tall

$\Downarrow$

$z + x = y$ der y er et rasjonalt tall

$\Downarrow$

$x - y = -z$ der $-z$ er et irrasjonalt tall

$\Downarrow$ når y er rasjonal, er også $-y$ rasjonal

$x + (-y) = -z$ der $-y$ er et rasjonalt tall

$\Downarrow$

$r = -z$ r er et rasjonalt tall fordi $x + (-y)$ er et rasjonalt tall, jf. forrige bevis

$\Downarrow$

t: et rasjonalt tall kan være likt et irrasjonalt tall

Vi vet at påstanden t er usann, for et tall kan ikke være både rasjonalt og irrasjonalt.
Påstanden ikke-p fører altså logisk til noe vi vet er galt. Derfor må påstanden ikke-p være usann. Og det betyr at påstanden p må være sann.
Dermed har vi bevist at summen av et rasjonalt og et irrasjonalt tall alltid er et irrasjonalt tall.

På en måte kan vi si at ved et indirekte bevis er bevisgangen snudd på hodet. Vi starter med det motsatte av det vi vil bevise.
Også her bruker vi definisjoner og kjente setninger. Men vi bruker dem ikke for å komme direkte fram til den setningen vi vil bevise. Vi bruker dem til å bevise at negasjonen av denne setningen logisk fører til noe vi vet er usant.

SAMLEOPPGAVER

1.A

Løs likningene.

a $4x - 5 = 2 + \frac{x}{2}$

b $\frac{x+3}{5} - \frac{x-1}{2} = \frac{x+2}{10}$

c $\frac{6}{x-3} - \frac{3}{x} = \frac{x+11}{x^2-3x}$

1.B

Løs likningene.

a $\frac{x+4}{x^2+2x} = \frac{6}{x} - \frac{1}{x+2}$

b $\frac{3}{x} - \frac{2}{x-1} = \frac{3x-1}{x^2-x}$

1.C

På en prøve skulle elevene løse likningen

$5x^2 - 20x = x^2 - 16$

Marx faktoriserte venstre og høyre side, og dividerte likningen med $x - 4$.

$5x(x-4) = (x-4)(x+4)$

$5x = x + 4$

$x = 1$

Gir denne besvarelsen full uttelling? Begrunn svaret. Hvordan vil du løse oppgaven?

1.D

a Løs likningen ved regning og grafisk på lommeregneren.

$\sqrt{x+2} + x = 4$

b Bestem en verdi for a slik at $x = 6$ blir en løsning på likningen $\sqrt{a-x} = 4 + x$.
Har likningen flere løsninger når a har den verdien du fant?

1.E

a Løs ulikhetene ved regning og grafisk på lommeregneren.

1 $8x - 4 < 3x + 11$

2 $\frac{3}{4} - 2x < \frac{5}{3} - \frac{x}{6}$

b En klasse skal arrangere en tur og innhenter tilbud fra et reiseselskap. Selskapet skal ha 6000 kr pluss 250 kr for hver deltaker. La x være antall elever som blir med på turen.
Sett opp en ulikhet som viser hvor mange elever som minst må melde seg på for at turen skal koste mindre enn 500 kr per elev.
Løs likningen grafisk på lommeregneren.

1.F

a Løs ulikheten $x^2 + 6x - 7 > 0$ ved regning.

b Hva sier svaret i oppgave a om grafen til $f(x) = x^2 + 6x - 7$?

c Funksjonen $g(x)$ er gitt ved $g(x) = -2f(x)$.
Løs ulikheten $g(x) \geq 0$.

1.G

Sadia kaster en ball som tilnærmet følger en bane der høyden over bakken er gitt ved
$f(x) = -0{,}01x^2 + 0{,}3x + 2{,}20$
x er den horisontale avstanden fra stedet der Sadia kaster ballen.
Løs ulikheten $f(x) > 2{,}20$ ved regning.
Hva forteller svaret om kastet?
Løs også ulikheten grafisk på lommeregneren.

1.H

a Løs ulikhetene ved regning og grafisk på lommeregneren.

1 $\frac{2x-3}{4-x} \geq 0$ **2** $\frac{4x-2}{x-3} < 6$

b Løs ulikheten ved regning.

$\frac{2x-3}{1-x} < x - 3$

Hva sier svaret om grafene til funksjonene $f(x) = \frac{2x-3}{1-x}$ og $g(x) = x - 3$?

SAMMENDRAG

Likninger

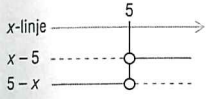
Når vi løser likninger, kan vi

- multiplisere med det samme på begge sider
- dividere med det samme på begge sider
- flytte et ledd over på den andre siden og skifte fortegn

Irrasjonale likninger

- Sørg for å få rottegnet alene på den ene siden.
- Kvadrer begge sider i likningen.
- Løs likningen du får etter kvadreringen.
- Husk å sette prøve.

Fortegnslinje



Faktorisering

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

x_1 og x_2 er løsninger på likningen $ax^2 + bx + c = 0$

Ulikheter av første grad

- $8x > 24$
  $x > 3$

- $-8x > 24$
  $x < -3$

Ulikheter av andre grad ved regning

Alternativ 1

- Faktoriser andregradsuttrykket.
- Tegn fortegnsskjema.

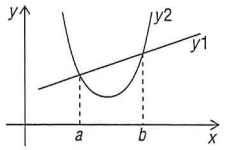
Alternativ 2

- Finn nullpunktene.
- Merk av nullpunktene på en fortegnslinje.
- Finn fortegnet på hver side av nullpunktene.

Brøkulikheter ved regning

- Sørg for å få null på høyre side.
- Skriv venstre side som en brøk og faktoriser.
- Tegn fortegnsskjema.

Grafisk løsning av ulikheter



y1 > y2

Ulikheten stemmer når grafen til y1 ligger over grafen til y2.

$L = \langle a\,,\, b \rangle$