

Forkurs i matematikk

Eksamen

6. juni 2024

Løsningsforslag

Christian F. Heide

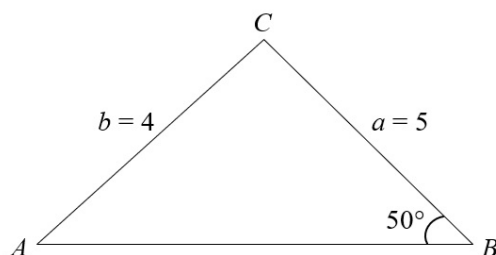
7. juni 2024

OPPGAVE 1

*I en trekant ABC er følgende gitt:
 $AC = 4, BC = 5, B = 50^\circ$.*

a) *Finn vinkel A.*

Vi kan først tegne en hjelpefigur:



Her kan vi bruke sinussetningen for å regne ut vinkel A . Sinussetningen sier

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

Hvis vi ganger begge sider i dette uttrykket med a , får vi

$$\sin A = \frac{\sin B}{b} \cdot a$$

Så setter vi inn tall, og får

$$\sin A = \frac{\sin 50^\circ}{4} \cdot 5 = 0,9576$$

som gir

$$A = \sin^{-1} 0,9576 = \underline{\underline{73,2^\circ}} \quad \vee \quad A = 180^\circ - 73,2^\circ = \underline{\underline{106,8^\circ}}$$

Den siste vinkelen må vi ta med fordi den er supplementvinkelen til den første, og derfor har samme sinusverdi. Vi får to mulige løsninger for vinkel A . Trekanten kan altså ikke bestemmes entydig basert på de opplysningene som er gitt i oppgaven.

b) Finn arealet av trekanten.

(Hvis du ikke fant vinkel A i spørsmål a, kan du benytte $A = 60^\circ$ når du svarer på dette spørsmålet.)

Det enkleste her er trolig å regne ut vinkel C og deretter bruke arealsetningen som lyder

$$T = \frac{1}{2}ab \sin C$$

Vinkel C finner vi ved å benytte at vinkelsummen i en trekant er 180° . Siden vi fikk to mulige svar i spørsmål a, får vi også to muligheter her:

$$C = 180^\circ - 73,2^\circ - 50^\circ = 56,8^\circ$$

$\vee$

$$C = 180^\circ - 106,8^\circ - 50^\circ = 23,2^\circ$$

Da finner vi følgende to mulige arealer for trekanten (vi kan altså ikke bestemme dette entydig):

$$T = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \sin 56,8^\circ = \underline{\underline{8,4}}$$

✓

$$T = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \sin 23,2^\circ = \underline{\underline{3,9}}$$

(Den som benytter $A = 60^\circ$ i løsningen av denne oppgaven, vil få arealet $T = 9,4$.)

OPPGAVE 2

a) Løs følgende ulikhet ved regning:

$$\frac{x+2}{4-x} > 1$$

Vi flytter først 1-tallet over på venstre side:

$$\frac{x+2}{4-x} - 1 > 0$$

Vi utvider leddet -1 slik at det blir en brøk med samme nevner som den første brøken:

$$\frac{x+2}{4-x} - \frac{4-x}{4-x} > 0$$

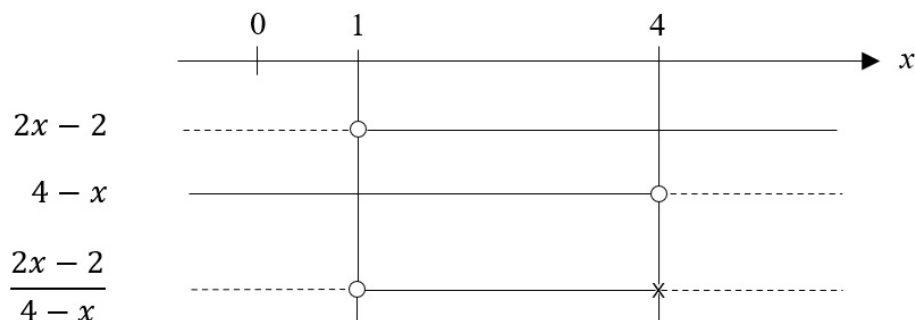
Så setter vi alt på felles brøkestrek:

$$\frac{x+2-(4-x)}{4-x} > 0$$

$$\frac{x+2-4+x}{4-x} > 0$$

$$\frac{2x-2}{4-x} > 0$$

Denne kan vi løse ved å tegne fortegnsskjema. Vi tegner én fortegnslinje for telleren, én fortegnslinje for nevneren, og kan da tegne en fortegnslinje for brøken som helhet:



Oppgaven er å finne hvor brøken er større enn 0, altså positiv.

Vi ser at brøken er positiv når x er mellom 1 og 4.

Svaret blir følgelig:

$$\underline{\underline{1 < x < 4}}$$

b) Løs følgende ligning ved regning:

$$x + 3 = \sqrt{4x + 17}$$

Vi kvadrerer først begge sider:

$$(x + 3)^2 = (\sqrt{4x + 17})^2$$

$$x^2 + 6x + 9 = 4x + 17$$

Så flytter vi alt over på venstre side:

$$x^2 + 6x + 9 - 4x - 17 = 0$$

Vi trekker sammen, og får

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

Vi kan løse denne ved hjelp av abc -formelen:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$x = \frac{-2 + 6}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \vee \quad x = \frac{-2 - 6}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Vi må til slutt sette prøve på disse løsningene for å se om det er introdusert falske løsninger.

$$\underline{x = 2:}$$

$$\text{VS: } 2 + 3 = 5$$

$$\text{HS: } \sqrt{4 \cdot 2 + 17} = \sqrt{8 + 17} = \sqrt{25} = 5$$

Vi ser at VS er lik HS, så dette er en løsning av ligningen.

$$\underline{x = -4:}$$

$$\text{VS: } -4 + 3 = -1$$

$$\text{HS: } \sqrt{4 \cdot (-4) + 17} = \sqrt{-16 + 17} = \sqrt{1} = 1$$

Vi ser at VS ikke er lik HS, så dette er ikke en løsning av ligningen.

Løsningen av ligningen blir følgelig

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

OPPGAVE 3

I en bygd bor det 361 kvinner og 339 menn. 2 av kvinnene og 26 av mennene er fargeblinde.

Vi trekker tilfeldig ut en person fra denne bygda.

Vi definerer følgende hendelser:

M: Den uttrukne personen er mann.

F: Den uttrukne personen er fargeblind.

a) *Hva er sannsynligheten for at den uttrukne personen er fargeblind?*

Siden alle personene har samme sannsynlighet for å bli trukket ut, har vi en uniform sannsynlighetsfordeling. Vi kan da regne ut sannsynligheter ved å telle antall gunstige og dele på antall mulige.

Antall gunstige er totalt antall fargeblinde, altså $g = 2 + 26 = 28$.

Antall mulige er totalt antall personer i bygda, altså $m = 361 + 339 = 700$.

Sannsynligheten er følgelig

$$P(F) = \frac{28}{700} = \frac{1}{25} = \underline{\underline{0,04}}$$

b) Hva er sannsynligheten for at den uttrukne personen er fargeblind når vi vet at det er en mann vi har trukket ut?

Hvis vi vet at det er en mann som er trukket ut, er antall mulige $m = 339$.

Antall gunstige er da antall menn som er fargeblinde, altså $g = 26$.

Sannsynligheten blir da

$$P(F|M) = \frac{26}{339} = \underline{\underline{0,077}}$$

c) Er F og M uavhengige hendelser? Begrunn svaret.

Dette kan vi finne på flere ulike måter. Det enkleste er å sjekke om $P(F|M) = P(F)$.

Vi fant i spørsmål b at $P(F|M) = 0,077$, mens vi i spørsmål a fant $P(F) = 0,04$. Vi ser at disse ikke er like, og kan derfor konkludere:

M og F er ikke uavhengige hendelser.

OPPGAVE 4

a) Løs følgende ligning ved regning:

$$10^{3x} = 8$$

Vi tar logaritmen på begge sider:

$$\log 10^{3x} = \log 8$$

$$3x = \log 8$$

$$\underline{\underline{x = \frac{\log 8}{3} = \log 2 \approx 0,301}}$$

(Den siste omgjøringen kan vi gjøre fordi $8 = 2^3$, slik at $\frac{\log 8}{3} = \frac{\log 2^3}{3} = \frac{3 \cdot \log 2}{3} = \log 2$.)

b) Løs følgende ligning ved regning:

$$\log(2x) = 4$$

(«log» er det samme som i boka kalles «lg», altså 10-logaritme.)

Vi tar 10 opphøyd i begge sider:

$$10^{\log(2x)} = 10^4$$

$$2x = 10\,000$$

$$\underline{\underline{x = 5000}}$$

c) Løs følgende ligning ved regning:

$$2\cos^2 x + 2\cos x + 1 = \cos x + 2 \quad x \in [0^\circ, 360^\circ)$$

Vi flytter alt over på venstre side:

$$2\cos^2 x + 2\cos x + 1 - \cos x - 2 = 0$$

Vi trekker sammen:

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

Så bruker vi *abc*-formelen for å finne hvilke verdier av $\cos x$ som oppfyller denne ligningen:

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\cos x = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \cos x = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

Dette tilsvarer følgende vinkler:

$$x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ \quad \vee \quad x = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ \quad \vee$$

$$x = \cos^{-1}(-1) = 180^\circ \quad \vee \quad x = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$$

(Eksplementvinkelen til 180° er 180° .) I stigende rekkefølge får vi da

$$\underline{\underline{x = 60^\circ \quad \vee \quad x = 180^\circ \quad \vee \quad x = 300^\circ}}$$

OPPGAVE 5

Gitt punktene $A = (-1, 2)$ og $B = (3, 1)$.

a) Finn vektoren $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = [3 - (-1), 1 - 2] = \underline{\underline{[4, -1]}}$$

Gitt vektorene $\vec{u} = [2, -1]$ og $\vec{v} = [1, 3]$.

b) Finn skalarproduktet $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = [2, -1] \cdot [1, 3] = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = 2 - 3 = \underline{\underline{-1}}$$

c) Finn vinkelen mellom vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Her kan vi bruke skalarproduktet:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Løser vi dette uttrykket med hensyn på $\cos(\vec{u}, \vec{v})$, får vi

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Skalarproduktet fant vi i spørsmål b at var $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$, så vi trenger nå å finne lengdene av vektorene. Dette gjør vi slik:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = [2, -1] \cdot [2, -1] = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) = 4 + 1 = 5$$

Vi vet at

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

så da får vi

$$|\vec{u}| = \sqrt{5}$$

På samme måte finner vi

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = [1, 3] \cdot [1, 3] = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 1 + 9 = 10$$

som gir

$$|\vec{v}| = \sqrt{10}$$

Vi får derfor

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = -0,1414$$

som gir

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \cos^{-1}(-0,1414) = \underline{\underline{98,1^\circ}}$$

OPPGAVE 6

Funksjonen $f(x)$ er gitt ved

$$f(x) = 6x^3 + 9x^2 + 2$$

a) Bestem eventuelle toppunkter og bunnpunkter for funksjonen $f(x)$.

Dette finner vi ved å derivere funksjonen. Vi finner

$$f'(x) = 6 \cdot 3 \cdot x^{3-1} + 9 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 0 = 18x^2 + 18x$$

Topp- og bunnpunkter finner vi der den deriverte er lik 0:

$$18x^2 + 18x = 0$$

$$18 \cdot x \cdot (x + 1) = 0$$

Et produkt er 0 kun dersom minst en av faktorene er 0. Tallet 18 kan aldri være 0. Altså får vi

$$x = 0 \quad \vee \quad x + 1 = 0$$

som gir

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -1$$

For å finne hvilken av disse som er toppunkt og bunnpunkt, kan vi tegne fortegnsskjema for $f'(x)$, eller for en tredjegradsfunksjon som vi har her, bare regne ut funksjonsverdiene i punktene.

$$f(0) = 6 \cdot 0^3 + 0 \cdot 0^2 + 2 = 2$$

$$f(-1) = 6 \cdot (-1)^3 + 9 \cdot (-1)^2 + 2 = -6 + 9 + 2 = 5$$

Vi ser av dette at

funksjonen har toppunkt i $(-1, 5)$ og bunnpunkt i $(0, 2)$.

b) Bestem eventuelle vendepunkter for funksjonen $f(x)$.

Vendepunkter finner vi der den annenderiverte bytter fortegn. Vi finner den annenderiverte ved å derivere den deriverte som her er $f'(x) = 18x^2 + 18x$. Den annenderiverte blir da:

$$f''(x) = 18 \cdot 2 \cdot x + 18 = 36x + 18$$

Denne bytter fortegn der $f''(x) = 0$:

$$36x + 18 = 0$$

$$36x = -18$$

$$x = -\frac{18}{36} = -\frac{1}{2}$$

y -koordinaten til vendepunktet er

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 9 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 =$$

$$-\frac{6}{8} + \frac{9}{4} + 2 = -\frac{3}{4} + \frac{9}{4} + \frac{8}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

Funksjonen har et vendepunkt i $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

OPPGAVE 7

I disse oppgavene må du vise hvordan du regner ut den deriverte og den integrerte. Å finne svarene på kalkulatoren gir ingen poeng.

a) Gitt funksjonen

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$$

Finn $f'(x)$.

For lettere å derivere, kan vi skrive kvadratroten som opphøyd i $\frac{1}{2}$, slik at funksjonen blir seende slik ut:

$$f(x) = (x^2 + 3)^{1/2}$$

Her må vi bruke kjerneregelen for å derivere. Den ytre funksjonen er $u^{1/2}$, mens kjernen er $u = x^2 + 3$. Den deriverte av kjernen er $u' = 2x$. Vi får da

$$f'(x) = \frac{1}{2} u^{1/2-1} \cdot u' = \frac{1}{2} u^{-1/2} \cdot u' = \frac{1}{2} (x^2 + 3)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{2x}{2(x^2 + 3)^{1/2}} =$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

b) Gitt funksjonen

$$g(x) = \frac{e^x - x}{3x}$$

Finn $g'(x)$.

Her må vi bruke regelen for den deriverte av en brøk. Denne regelen kan skrives slik

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

I tillegg bruker vi regelen om at den deriverte av e^x er e^x .

Bruker vi disse reglene, får vi

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(e^x - 1) \cdot 3x - (e^x - x) \cdot 3}{(3x)^2} = \frac{3xe^x - 3x - 3e^x + 3x}{9x^2} = \\ &= \frac{3xe^x - 3e^x}{9x^2} = \frac{3(xe^x - e^x)}{9x^2} = \\ &= \frac{xe^x - e^x}{3x^2} = \frac{x-1}{3x^2} \cdot e^x \end{aligned}$$

c) Regn ut integralet

$$\int_3^6 (3x^2 + 2x) dx$$

$$\int_3^6 (3x^2 + 2x) dx = \left[3 \cdot \frac{1}{2+1} x^{2+1} + 2 \cdot \frac{1}{1+1} x^{1+1} \right]_3^6 = [x^3 + x^2]_3^6 =$$

$$6^3 + 6^2 - (3^3 + 3^2) = 216 + 36 - (27 + 9) = 252 - 36 = \underline{\underline{216}}$$

OPPGAVE 8

En foreleser underviser et fag hvor man på eksamen kan få maks 80 poeng. Foreleseren har oppdaget at i dette faget er det slik at for hver gang en student unnlater å møte i en forelesning, så reduseres studentens resultat på eksamen med 5 %. Dette vil si at en student som har møtt på alle forelesninger, vil få 80 poeng. En student som dropper én enkelt forelesning oppnår 95 % av dette, altså 76 poeng.

En latsabb av en student ønsker å vite hvor mange av de oppsatte 32 forelesningene han må møte på for å stå på eksamen når kravet for å bestå i dette faget er minimum 30 poeng.

Vi kaller antall forelesninger som studenten dropper for x .

Antall poeng som studenten får på eksamen som funksjon av x , blir da

$$f(x) = 80 \cdot 0,95^x$$

For at denne skal være minimum 30 (som er strykgrensen) må x være

$$80 \cdot 0,95^x > 30$$

Vi deler med 80 på begge sider:

$$0,95^x > \frac{30}{80} = \frac{3}{8} = 0,375$$

Så tar vi logaritmen på begge sider:

$$\ln 0,95^x > \ln 0,375$$

$$x \cdot \ln 0,95 > \ln 0,375$$

Så deler vi på $\ln 0,95$ på begge sider, men siden dette er et negativt tall ($\ln 0,95 \approx -0,05$), må vi snu ulikhetstegnet:

$$x < \frac{\ln 0,375}{\ln 0,95} = 19,1$$

Studenten må altså droppe færre enn 19,1 forelesninger. Det betyr at han maksimalt kan droppe 19 forelesninger. Det er 32 forelesninger totalt. Da finner vi $32 - 19 = 13$.

Han må møte på minimum 13 forelesninger.