

Forkurs i matematikk

Eksamen

8. juni 2023

Løsningsforslag

Christian F. Heide

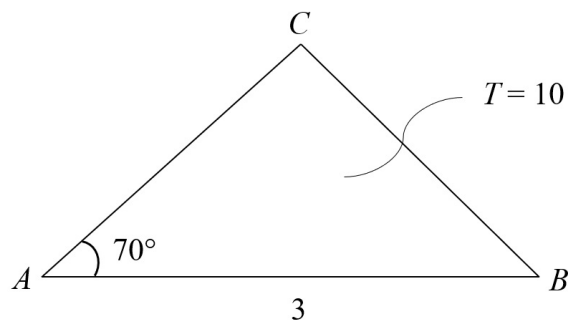
June 9, 2023

OPPGAVE 1

*I en trekant ABC er følgende gitt:
 $AB = 3$, $A = 70^\circ$ og arealet av trekanten er 10.*

a) *Finn lengden av side AC.*

Før vi går i gang med å regne på dette, kan det være lurt å tegne en hjelpefigur og sette på de målene vi kjenner:



Vi kan benytte formelen for arealet av en trekant:

$$T = \frac{1}{2}bc \sin A$$

Her er det AC vi skal finne. Dette er det samme som sidekant b (fordi denne er motstående til vinkel B). Sidekant AB er det samme som c .

Vi kan nå løse uttrykket med hensyn på b ved å gange begge sider med 2 og dele begge sider med $c \cdot \sin A$. Vi får da:

$$T \cdot \frac{2}{c \cdot \sin A} = \frac{1}{2}bc \sin A \cdot \frac{2}{c \cdot \sin A}$$

Vi forkorter 2, c og $\sin A$ på høyre side, og står igjen med

$$T \cdot \frac{2}{c \cdot \sin A} = b$$

Vi bytter om på høyre og venstre side:

$$b = T \cdot \frac{2}{c \cdot \sin A}$$

Vi setter så inn tall, og får

$$AC = b = T \cdot \frac{2}{c \cdot \sin A} = 10 \cdot \frac{2}{3 \cdot \sin 70^\circ} = \underline{\underline{7,1}}$$

b) Finn lengden av side BC .

(Hvis du ikke fant lengden av side AC i spørsmål a, kan du benytte $AC = 6$ når du svarer på dette spørsmålet.)

Sidekant BC er den som også kalles a . Denne finner vi kanskje enklest ved å bruke cosinus-setningen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Setter vi inn tall, finner vi

$$a^2 = 7,1^2 + 3^2 - 2 \cdot 7,1 \cdot 3 \cdot \cos 70^\circ =$$

$$50,33 + 9 - 14,56 = 44,77$$

Vi får da

$$BC = a = \sqrt{44,77} = \underline{\underline{6,7}}$$

Hvis vi hadde brukt $AC = 6$, ville vi fått

$$a = 5,7$$

OPPGAVE 2

a) Løs følgende ulikhet ved regning:

$$\frac{3-x}{x+5} < 1$$

Vi flytter først 1-tallet over på venstre side:

$$\frac{3-x}{x+5} - 1 < 0$$

Vi utvider leddet -1 slik at det blir en brøk med samme nevner som den første brøken:

$$\frac{3-x}{x+5} - \frac{x+5}{x+5} < 0$$

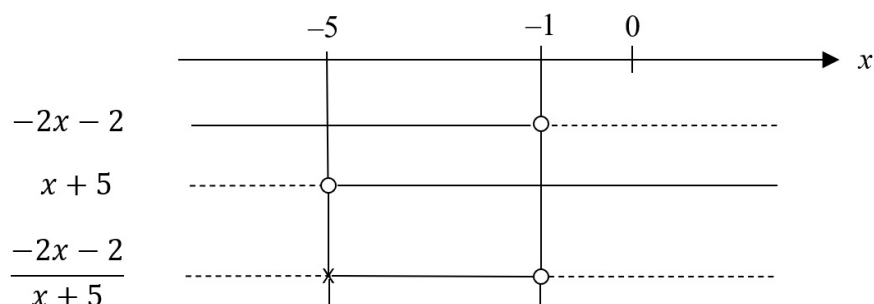
Så setter vi alt på felles brøkestrek:

$$\frac{3-x-(x+5)}{x+5} < 0$$

$$\frac{3-x-x-5}{x+5} < 0$$

$$\frac{-2x-2}{x+5} < 0$$

Denne kan vi løse ved å tegne fortegnsskjema. Vi tegner én fortegnslinje for telleren, én fortegnslinje for nevneren og kan da tegne en fortegnslinje for brøken som helhet:



Oppgaven er å finne hvor brøken er mindre enn 0, altså negativ.

Vi ser at brøken er negativ når x er mindre enn -5 eller større enn -1 .

Svaret blir følgende:

$$\underline{\underline{x < -5 \quad \vee \quad x > -1}}$$

b) Løs følgende ligning ved regning:

$$x - 2 = \sqrt{16 - 3x}$$

Vi kvadrerer begge sider:

$$(x - 2)^2 = (\sqrt{16 - 3x})^2$$

$$x^2 - 4x + 4 = 16 - 3x$$

Så flytter vi alt over på venstre side:

$$x^2 - 4x + 4 - 16 + 3x = 0$$

Vi trekker sammen, og får

$$x^2 - x - 12 = 0$$

Vi kan løse denne ved hjelp av abc -formelen:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$$

$$x = \frac{1 + 7}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \vee \quad x = \frac{1 - 7}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Vi må til slutt sette prøve på disse løsningene for å se om det er introdusert falske løsninger.

$$\underline{x = 4:}$$

$$\text{VS: } 4 - 2 = 2$$

$$\text{HS: } \sqrt{16 - 3 \cdot 4} = \sqrt{16 - 12} = \sqrt{4} = 2$$

Vi ser at VS er lik HS, så dette er en løsning av ligningen.

$$\underline{x = -3:}$$

$$\text{VS: } -3 - 2 = -5$$

$$\text{HS: } \sqrt{16 - 3 \cdot (-3)} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Vi ser at VS ikke er lik HS, så dette er ikke en løsning av ligningen.

Løsningen av ligningen blir følgelig

$$\underline{\underline{x = 4}}$$

OPPGAVE 3

I Norges regjering er det i skrivende stund 18 ministre i tillegg til statsministeren. Av disse 19 regjeringsmedlemmene, er 11 fra Arbeiderpartiet og 8 fra Senterpartiet.

Det er for tiden 9 kvinner i regjeringen. 4 av disse er fra Senterpartiet og 5 er fra Arbeiderpartiet.

Vi trekker en tilfeldig person fra regjeringen.

Vi definerer følgende hendelser:

A: Den uttrukne personen tilhører Arbeiderpartiet.

K: Den uttrukne personen er en kvinne.

a) *Finn sannsynligheten for at den uttrukne er en kvinne gitt at hun tilhører Arbeiderpartiet.*

Siden alle har samme sannsynlighet for å bli trukket ut, kan vi regne sannsynligheten ved å telle antall gunstige og dele på antall mulige.

Siden vi vet at den uttrukne tilhører Arbeiderpartiet, er det bare 11 mulige. Fordi antall kvinnelige regjeringsmedlemmer som tilhører Arbeiderpartiet er 5, er dette antall gunstige. Sannsynligheten er derfor

$$\underline{\underline{P(K|A) = \frac{5}{11} \approx 0,45}}$$

Alternativt kan vi bruke uttrykket

$$P(K|A) = \frac{P(K \cap A)}{P(A)}$$

Her er

$$P(K \cap A) = \frac{5}{19}$$

og

$$P(A) = \frac{11}{19}$$

som gir

$$P(K|A) = \frac{\frac{5}{19}}{\frac{11}{19}} = \frac{5}{\underline{\underline{11}}}$$

b) Er A og K uavhengige hendelser? Begrunn svaret.

For å sjekke om A og K er uavhengige hendelse, kan vi enten sjekke om

$$P(K|A) = P(K)$$

om

$$P(A|K) = P(A)$$

eller om

$$P(A \cap K) = P(A) \cdot P(K)$$

Det er tilstrekkelig å sjekke en av disse. Jeg viser her den første og den siste:

$$P(K|A) = \frac{5}{11} \approx 0,45$$

$$P(K) = \frac{9}{19} \approx 0,47$$

Vi ser at $P(K|A) \neq P(K)$, noe som betyr at hendelsene ikke er uavhengige.

Alternativt kan vi altså sjekke om $P(A \cap K) = P(A) \cdot P(K)$:

$$P(A \cap K) = \frac{5}{19} \approx 0,263$$

$$P(A) \cdot P(K) = \frac{11}{19} \cdot \frac{9}{19} = \frac{99}{361} \approx 0,274$$

Vi ser at $P(A \cap K) \neq P(A) \cdot P(K)$, noe som betyr at hendelsene ikke er uavhengige.

OPPGAVE 4

a) Løs følgende ligning ved regning:

$$10^{2x} = 50$$

Vi tar tier-logaritmen (den briggske logaritmen) på begge sider:

$$\lg 10^{2x} = \lg 50$$

Fordi 10^x og $\lg x$ er inverse funksjoner, vil de oppheve virkningen av hverandre når de står inntil hverandre slik som de gjør på venstre side her. Vi får da

$$2x = \lg 50$$

$$\underline{\underline{x = \frac{\lg 50}{2} \approx 0,85}}$$

b) Løs følgende ligning ved regning:

$$\ln(2x) - 16 = 0$$

Vi flytter 16 over på høyre side:

$$\ln(2x) = 16$$

Så eksponentierer vi begge sider:

$$e^{\ln(2x)} = e^{16}$$

Fordi e^x og $\ln x$ er inverse funksjoner, vil de oppheve virkningen av hverandre når de står inntil hverandre, slik som her. Vi får da

$$2x = e^{16}$$

Vi deler med 2 på begge sider, og får

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{2}e^{16} \approx 4\,443\,055,3}}$$

c) Løs følgende ligning ved regning:

$$3 \sin^2 x + 4 \sin x + 1 = \sin^2 x + 3 \sin x + 2 \quad x \in [0^\circ, 360^\circ)$$

Vi flytter alt over på venstre side:

$$3 \sin^2 x + 4 \sin x + 1 - \sin^2 x - 3 \sin x - 2$$

Så trekker vi sammen det vi kan, og får

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\sin x = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \sin x = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$\sin x = \frac{1}{2}$ gir

$$x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{30^\circ} \quad \vee \quad x = 180^\circ - 30^\circ = \underline{150^\circ}$$

$\sin x = -1$ gir

$$x = \sin^{-1}(-1) = -90^\circ$$

Dette er imidlertid ikke en vinkel i første omløp. For å finne den tilsvarende vinkelen i første omløp, må vi addere et helt omløp (altså 360°). Vi får da:

$$x = -90^\circ + 360^\circ = \underline{270^\circ}$$

Supplementvinkelen til -90° , er $x = 180^\circ - (-90^\circ) = 270^\circ$, altså den samme vinkelen vi fant over.

Løsningene av ligningen er følgelig

$$\underline{x = 30^\circ} \quad \vee \quad \underline{x = 150^\circ} \quad \vee \quad \underline{x = 270^\circ}$$

OPPGAVE 5

Gitt vektorene $\vec{u} = [-3, 1]$ og $\vec{v} = [2, 3]$.

a) Finn skalarproduktet $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = [-3, 1] \cdot [2, 3] = (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 3 = -6 + 3 = \underline{\underline{-3}}$$

b) Finn vinkelen mellom vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Skalarproduktet er definert ved

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Deler vi på begge sider med $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, får vi

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

For å kunne bruke denne, må vi finne lengdene til de to vektorene:

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Skalarproduktet fant vi i spørsmål a: $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$. Vi får da

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-3}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}} = -0,2631$$

som gir

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \cos^{-1} 0,2631 = \underline{\underline{105,3^\circ}}$$

En linje l går gjennom punktene $A(-3, 2)$ og $B(2, -4)$.

c) Finn en parameterfremstilling for l .

Parameterfremstillingen for en rett linje finner vi enkelt dersom vi kjenner en retningsvektor for linjen og et punkt som ligger på linjen.

Fordi linjen l går gjennom punktene A og B , vil $\overrightarrow{AB}$ være en retningsvektor for linjen. Vi finner derfor først $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = [2 - (-3), -4 - 2] = [5, -6]$$

Bruker vi nå A som det kjente punktet på linjen, får vi følgende parameterframstilling:

$$\underline{\underline{l: \quad x = 5t - 3 \quad \wedge \quad y = -6t + 2}}$$

OPPGAVE 6

Funksjonen $f(x)$ er gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 32x - 7$$

a) Bestem eventuelle toppunkter og bunnpunkter for funksjonen $f(x)$.

(Du trenger ikke å regne ut funksjonsverdiene i punktene. Det er tilstrekkelig å finne x -verdiene.)

For å bestemme dette deriverer vi funksjonen:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^{3-1} + 2 \cdot 2 \cdot x^{2-1} - 32 - 0 = \underline{x^2 + 4x - 32}$$

Vi finner så hvor den deriverte er lik 0:

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 + 4x - 32 = 0$$

Så bruker vi abc -formelen:

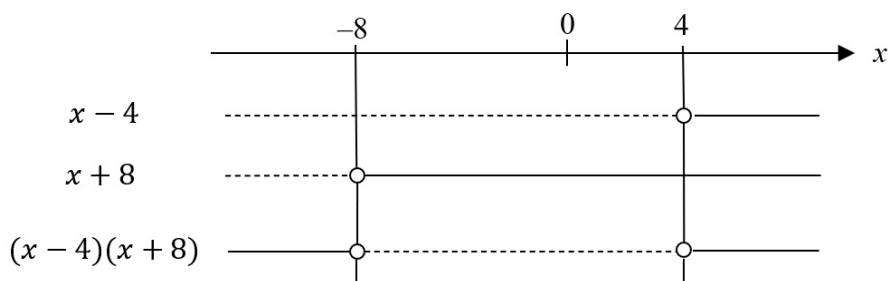
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 128}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{-4 \pm 12}{2}$$

$$x = \frac{-4 + 12}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \vee \quad x = \frac{-4 - 12}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$

Dette betyr at vi kan faktorisere $f'(x)$ slik:

$$f'(x) = (x - 4)(x + 8)$$

Vi kan så benytte et fortegnsskjema for å studere fortegnet til den deriverte:



Vi må nå kjenne til at f stiger der den deriverte er positiv, og synker der den deriverte er negativ.

Av fortegnsskjemaet ser vi da at f stiger fram til $x = -8$ for deretter å synke fram til $x = 4$ hvorefter den stiger igjen. Det betyr at $x = -8$ er et toppunkt (et lokalt maksimum), mens $x = 4$ er et bunnpunkt (et lokalt minimum). Altså:

f har et toppunkt for $x = -8$ og et bunnpunkt for $x = 4$.

b) Bestem eventuelle vendepunkter for funksjonen $f(x)$.
(Også her er det tilstrekkelig å finne x -verdiene.)

For å bestemme eventuelle vendepunkter finner vi den annenderiverte. Dette gjør vi ved å derivere uttrykket for $f'(x)$ som vi fant i spørsmål a, altså ved å derivere $f'(x) = x^2 + 4x - 32$. Vi får da:

$$f''(x) = 2x + 4$$

Vi finner hvor denne er 0:

$$f''(x) = 0$$

$$2x + 4 = 0$$

$$2x = -4$$

$$x = \frac{-4}{2} = -2$$

Det betyr at $f''(-2) = 0$. Dette er et vendepunkt dersom $f''(x)$ bytter fortegn i dette punktet. Siden $f''(x)$ er en førstegradsfunksjon, altså en rett linje, vil den bytte fortegn i nullpunktet. (Alternativt kan vi sjekke med et tall mindre enn -2 og et tall større enn -2 :

$$f''(-3) = 2 \cdot (-3) + 4 = -6 + 4 = -2 \text{ og } f''(0) = 4.)$$

Følgelig:

$$\underline{\underline{f \text{ har et vendepunkt i } x = -2}}$$

OPPGAVE 7

I disse oppgavene må du vise hvordan du regner ut den deriverte og den integrerte. Å finne svarene på kalkulatoren gir ingen poeng.

a) Gitt funksjonen

$$f(x) = \sqrt{x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3}$$

Finn $f'(x)$.

Her er $\sqrt{u} = u^{1/2}$ den ytre funksjonen og $u = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3$ er kjernen. Bruker vi kjerneregelen får vi da

$$f'(x) = \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1} \cdot u' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot u'$$

Den deriverte av kjernen er

$$u' = 3x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2x = 3x^2 - x$$

Følgelig får vi

$$f'(x) = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot u' = \frac{1}{2}(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2 - x) =$$

$$\frac{3x^2 - x}{2\sqrt{x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3}} = \frac{3x^2 - x}{\sqrt{4x^3 - 2x^2 + 12}}$$

b) Gitt funksjonen

$$g(x) = \frac{2x^2 - x + 3}{x}$$

Finn $g'(x)$.

Her må vi bruke regelen for derivasjon av en brøk som er slik:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Vi får da

$$g'(x) = \frac{(2 \cdot 2x - 1) \cdot x - (2x^2 - x + 3) \cdot 1}{x^2} =$$

$$\frac{4x^2 - x - 2x^2 + x - 3}{x^2} =$$

$$\frac{2x^2 - 3}{x^2}$$

c) Regn ut integralet

$$\int_2^4 (x^3 - 2x) \, dx$$

$$\int_2^4 (x^3 - 2x) \, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^2 \right]_2^4 =$$

$$\frac{1}{4} \cdot 4^4 - 4^2 - \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2^2 \right) =$$

$$64 - 16 - (4 - 4) =$$

$$\underline{\underline{48}}$$

OPPGAVE 8

Ole tok eksamen i forkurs matematikk ved Høgskolen i Nordfold i 2020, og strøk med glans. Emneansvarlige, den strenge Christiane, sa imidlertid litt flåsete at «dersom forventet nivå for bestått hadde vært 75 % av hva det er nå, så ville du kanskje ha stått».

Ole har imidlertid hørt rykter om at eksamen ser ut til å bli 5 % lettere å løse for hvert år. Det vil jo da også si at kunnskapsnivået som kreves for å oppnå bestått synker tilsvarende... I stedet for å lese mer, tenker han heller å utsette oppstarten av studiet til eksamen har kommet ned «på hans nivå».

Hvilket år bør Ole forsøke seg på eksamen på nytt? Sagt på en annen måte: Hvilket år er nivået på eksamen redusert fra 100 % til under 75 %?

Dersom eksamen blir 5 % lettere for hvert år, betyr det at nivået etter ett år er $0,95 \cdot 100\%$. Etter 2 år er nivået $0,95^2 \cdot 100\%$, og etter n år er nivået $0,95^n \cdot 100\%$. Vi må da finne hvilken n som gjør at

$$0,95^n \cdot 100\% = 75\%$$

Vi deler på begge sider med 100 %, og får:

$$0,95^n = 0,75$$

Så tar vi logaritmen på begge sider:

$$\ln 0,95^n = \ln 0,75$$

$$n \cdot \ln 0,95 = \ln 0,75$$

Vi deler på begge sider med $\ln 0,95$:

$$n = \frac{\ln 0,75}{\ln 0,95} = 5,61$$

Ole må altså vente i 6 år for at nivået skal være sunket til under 75 %. Altså:

Ole bør vente til 2026 med å ta eksamen.