

Forkurs i matematikk

Eksamen

9. juni 2022

Løsningsforslag

Christian F. Heide

June 5, 2023

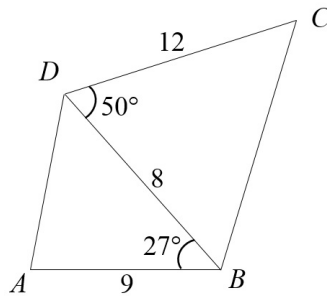
OPPGAVE 1

I en firkant ABCD er følgende gitt:

$AB = 9, BD = 8, DC = 12, \angle ABD = 27^\circ$ og $\angle BDC = 50^\circ$.

a) *Finn arealet av firkanten.*

Før vi går i gang og regner på dette, kan det være lurt å tegne en hjelpefigur og sette på de målene vi kjenner:



Av figuren ser vi at arealet av firkanten ABCD er lik summen av trekantene ABD og BCD. Arealet av en trekant er gitt ved

$$T = \frac{1}{2}ab \sin C$$

hvor a og b er to av sidene i trekanten og C er disse sidenes mellomliggende vinkel. Følgelig er

$$T_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 \cdot \sin 27^\circ = 16,34$$

$$T_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 \cdot \sin 50^\circ = 36,77$$

Arealet av firkanten er derfor

$$A_{ABCD} = T_{ABD} + T_{BCD} = 16,34 + 36,77 = \underline{\underline{53,1}}$$

b) Finn lengden av side BC.

Denne siden finner vi enklest ved å bruke cosinussetningen. Den kan skrives slik:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

hvor A er den motstående vinkelen til side a .

Hvis vi nå kaller BC for a , så blir $A = \angle BDC = 50^\circ$, $b = BD = 8$ og $c = CD = 12$, og vi får da

$$a^2 = 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \cos 50^\circ = 84,5848$$

og

$$BC = a = \sqrt{84,5848} = \underline{\underline{9,20}}$$

OPPGAVE 2

a) Løs følgende ulikhet ved regning:

$$\frac{x-4}{2-x} > 1$$

Vi flytter først 1-tallet over på venstre side:

$$\frac{x-4}{2-x} - 1 > 0$$

Vi utvider leddet -1 slik at det blir en brøk med samme nevner som den første brøken:

$$\frac{x-4}{2-x} - \frac{2-x}{2-x} > 0$$

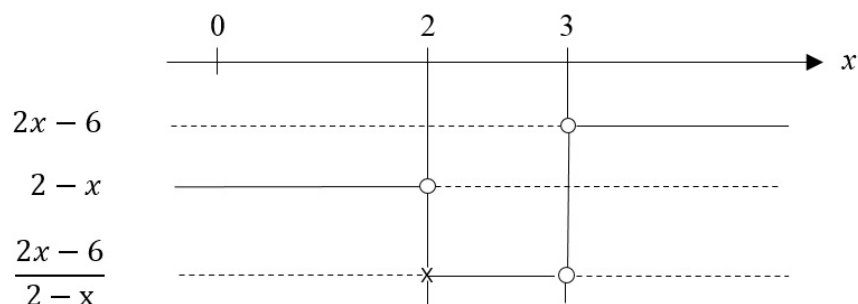
Så setter vi alt på felles brøkestrek:

$$\frac{x-4-(2-x)}{2-x} > 0$$

$$\frac{x-4-2+x}{2-x} > 0$$

$$\frac{2x-6}{2-x} > 0$$

Denne kan vi løse ved å tegne fortegnsskjema. Vi tegner én fortegnslinje for telleren, én fortegnslinje for nevneren og kan da tegne en fortegnslinje for brøken som helhet:



Oppgaven er å finne hvor brøken er større enn 0, altså positiv.

Vi ser at brøken er positiv når x er mellom 2 og 3.

Svaret blir følgelig:

$$\underline{\underline{2 < x < 3}}$$

b) Løs følgende ligning ved regning:

$$x - 3 = \sqrt{21 - 7x}$$

Vi kvadrerer begge sider:

$$(x - 3)^2 = (\sqrt{21 - 7x})^2$$

$$x^2 - 6x + 9 = 21 - 7x$$

$$x^2 - 6x + 9 - 21 + 7x = 0$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

Vi kan løse denne ved hjelp av abc -formelen:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

$$x = \frac{-1 + 7}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \vee \quad x = \frac{-1 - 7}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Vi må til slutt sette prøve på disse løsningene for å se om det er introdusert falske løsninger.

$$\underline{x = 3:}$$

$$\text{VS: } 3 - 3 = 0$$

$$\text{HS: } \sqrt{21 - 7 \cdot 3} = \sqrt{21 - 21} = 0$$

Vi ser at VS er lik HS, så dette er en løsning av ligningen.

$$\underline{x = -4:}$$

$$\text{VS: } -4 - 3 = -7$$

$$\text{HS: } \sqrt{21 - 7 \cdot (-4)} = \sqrt{21 + 28} = \sqrt{49} = 7$$

Vi ser at VS ikke er lik HS, så dette er ikke en løsning av ligningen.

Løsningen av ligningen blir følgelig

$$\underline{\underline{x = 3}}$$

OPPGAVE 3

a) Løs følgende ligning ved regning:

$$10^{4x} = 100$$

Vi kan ta logaritmen med grunntall 10 (den briggske logaritmen) på begge sider av likhetstegnet:

$$\lg 10^{4x} = \lg 100$$

$$4x \cdot \lg 10 = 2$$

$$4x \cdot 1 = 2$$

$$4x = 2$$

$$x = \frac{2}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

b) Løs følgende ligning ved regning:

$$\lg x^3 = 1$$

Eksponenten kan tas ned foran logaritmen:

$$3 \lg x = 1$$

$$\lg x = \frac{1}{3}$$

Vi kan så foreta en eksponentiering ved å ta 10 opphøyd i begge sider:

$$10^{\lg x} = 10^{\frac{1}{3}}$$

Siden 10^x og $\lg x$ er inverse funksjoner (også kalt omvendte funksjoner), opphever de virkningen av hverandre, og $10^{\lg x}$ på venstre side av likhetstegnet blir lik x , og vi får

$$\underline{\underline{x = 10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}}}$$

OPPGAVE 4

Gitt vektorene $\vec{u} = [3, 2]$ og $\vec{v} = [-2, 1]$.

a) Finn $3\vec{u} - 5\vec{v}$.

$$3\vec{u} - 5\vec{v} = 3 \cdot [3, 2] - 5 \cdot [-2, 1] = [9, 6] - [-10, 5] = [9 - (-10), 6 - 5] =$$

$$\underline{\underline{[19, 1]}}$$

b) Finn skalarproduktet $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = [3, 2] \cdot [-2, 1] = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -6 + 2 = \underline{\underline{-4}}$$

c) Finn vinkelen mellom vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Vi kan bruke definisjonen av skalarprodukt:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta$$

hvor θ er vinkelen mellom vektorene. Vi kan skrive denne sammenhengen som

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Skalarproduktet fant vi i spørsmål b. Vi må finne lengden av vektorene:

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

Vinkelen finner vi da slik:

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-4}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{5}} = -0,4961$$

$$\theta = \cos^{-1}(-0,4961) = \underline{\underline{119,7^\circ}}$$

OPPGAVE 5

I en bøtte ligger det 50 kuler. 15 av kulene er røde og 35 av kulene er grønne. På 10 av de røde kulene og 2 av de grønne kulene er det noen som har skrevet bokstaven M.

Vi trekker en kule. Vi definerer følgende hendelser:

R : Den uttrukne kula er rød.

G : Den uttrukne kula er grønn.

M : Den uttrukne kula er merket med en M.

a) Hva er sannsynligheten for at den uttrukne kula er rød?

Siden alle kulene har samme sannsynlighet for å bli trukket ut, har vi en uniform sannsynlighetsfordeling, og vi kan regne ut sannsynligheten ved å ta antall gunstige utfall og dele på antall mulige utfall. Her har vi 15 gunstige utfall (røde kuler) og 50 mulige utfall (totalt antall kuler). Derfor

$$P(R) = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0,3$$

b) Det trekkes en kule og du får vite at den uttrukne kula er rød. Hva er da sannsynligheten for at den er merket med bokstaven M?

Denne sannsynligheten kan uttrykkes $P(M|R)$, og kan regnes ut på ulike måter. En måte er slik:

$$P(M|R) = \frac{P(M \cap R)}{P(R)}$$

Siden det er 10 av de røde kulene som er merket med en M (det er altså 10 av de 50 kulene som er både røde og merket med M), er

$$P(M \cap R) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

I oppgave a fant vi

$$P(R) = \frac{3}{10}$$

Følgelig

$$P(M|R) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{\frac{1}{5} \cdot 10}{\frac{3}{10} \cdot 10} = \frac{2}{3} \approx 0,67$$

c) Det trekkes en kule fra bøtta. Hva er sannsynligheten for at kula er rød eller er merket med bokstaven M eller begge deler?

Denne sannsynligheten kan uttrykkes som $P(R \cup M)$. Denne sannsynligheten finner vi ved hjelp av addisjonssetningen:

$$P(R \cup M) = P(R) + P(M) - P(R \cap M)$$

Merk at $P(R \cap M)$ er det samme som $P(M \cap R) = \frac{1}{5}$. Videre har vi

$$P(M) = \frac{12}{50} = \frac{6}{25} = 0,24$$

Vi får da

$$P(R \cup M) = \frac{3}{10} + \frac{6}{25} - \frac{1}{5} = 0,3 + 0,24 - 0,2 = \underline{\underline{0,34}}$$

OPPGAVE 6

I disse oppgavene må du vise hvordan du regner ut den deriverte og den integrerte. Å finne svarene på kalkulatoren gir ingen poeng.

a) Gitt funksjonen

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{5}$$

Finn $f'(x)$.

Her kan det se ut som om vi trenger å bruke regelen for derivasjon av en brøk, men det er strengt tatt ikke nødvendig (selv om det ikke blir feil å gjøre det). Vi kan isteden skrive funksjonen slik:

$$f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{5}x$$

Vi får da

$$f'(x) = \frac{1}{5} \cdot 3 \cdot x^{3-1} - \frac{1}{5} = \underline{\underline{\frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{5}}}$$

b) Gitt funksjonen

$$g(x) = (x^2 + 3)^{15}$$

Finn $g'(x)$.

Her må vi bruke kjerneregelen.

$$g'(x) = 15 \cdot (x^2 + 3)^{15-1} \cdot (x^2 + 3)' = 15 \cdot (x^2 + 3)^{14} \cdot 2x =$$

$$\underline{\underline{30x(x^2 + 3)^{14}}}$$

c) Regn ut integralet

$$\int_3^6 (x^2 + 3) dx$$

$$\int_3^6 (x^2 + 3) dx = \left[\frac{1}{2+1} x^{2+1} + 3x \right]_3^6 = \left[\frac{1}{3} x^3 + 3x \right]_3^6 =$$

$$\frac{1}{3} \cdot 6^3 + 3 \cdot 6 - \left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 3 \cdot 3 \right) = 72 + 18 - (9 + 9) = \underline{\underline{72}}$$

OPPGAVE 7

Ole skal kjøpe seg et minihus (et 15 m² flyttbart hus) etter endt studium, men oppdager at det er et egenkapitalkrav på 15 % av kjøpesummen.

Før Ole ble student, fikk han 100 000 kr av besteforeldrene til studier og sparing. Ole har dessverre brukt alle pengene på pensumbøker og øl (vel, mest øl ...), og har ikke spart opp noe.

Hjemme på gutterommet hos foreldrene sitter Ole nå og sturer, og lurere på hvor mye mer av pensumbøkene han burde droppet å kjøpe.

Boligen han ville ha, koster kun 400 000, og den summen han ville trengt (altså egenkapitalkravet på 15 %), er derfor 60 000 kr.

Ole har vært student i 7 år. (Han har måttet ta mange av fagene om igjen på grunn av for stor satsing på øl og for lite satsing på studier.)

a) Anta at Ole kunne fått en fast, årlig avkastning på 5 % ved å sette penger i aksjefond. (Avkastning er i praksis det samme som hvilken rente man får.) Hvor mye av de opprinnelige 100 000 kronene måtte Ole ha satt i aksjefond den dagen han startet på studiet, for å nå egenkapitalkravet på 60 000 kroner etter 7 år?

Vi kan kalle beløpet han måtte ha satt i aksjefond for x . En avkastning på 5 % tilsvarer å gange med 1,05.

Etter ett år, vil han da ha $x \cdot 1,05$ kroner, etter to år $(x \cdot 1,05) \cdot 1,05 = x \cdot 1,05^2$, og etter sju år blir det da $x \cdot 1,05^7$.

Da blir altså ligningen vi skal løse

$$x \cdot 1,05^7 = 60\,000$$

Vi deler på begge sider med $1,05^7$, og får

$$x = \frac{60\,000}{1,05^7} = \frac{60\,000}{1,4071} = \underline{\underline{42\,641}}$$

b) Dersom Ole hadde satt halvparten av pengene (50 000 kroner) i aksjefondet i starten, hvor lang tid ville det tatt før han hadde nådd egenkapitalkravet på 60 000 kroner.

Etter ett år vil han ha $50\,000 \cdot 1,05$, etter to år $50\,000 \cdot 1,05^2$. Etter n år vil han da ha

$$50\,000 \cdot 1,05^n$$

Vi må da finne hvilken n som gjør at dette blir minst 60 000:

$$50\,000 \cdot 1,05^n \geq 60\,000$$

Vi deler på begge sider med 50.000:

$$1,05^n \geq \frac{60\,000}{50\,000} = \frac{6}{5}$$

Vi kan nå ta logaritmen på begge sider, og får

$$\ln 1,05^n \geq \ln \frac{6}{5}$$

$$n \cdot \ln 1,05 \geq \ln \frac{6}{5}$$

Vi deler på begge sider med $\ln 1,05$:

$$n \geq \frac{\ln \frac{6}{5}}{\ln 1,05} = \underline{\underline{3,74}}$$

Dersom han hadde satt 50 000 i aksjefond, ville han hatt over 60 000 etter fire år.

c) Hva måtte den årlige avkastningen vært for at Ole skulle nådd målet sitt på 60 000 kroner etter 7 år, dersom han startet med kun 40 000 kroner til sparing?

I dette tilfellet er det altså den årlige avkastningen som er den ukjente. For å finne denne, kan vi løse ligningen

$$40\,000 \cdot x^7 = 60\,000$$

Vi deler med 40 000 på begge sider:

$$x^7 = \frac{60\,000}{40\,000}$$

Forkorter vi brøken på høyre side med 20 000, får vi

$$x^7 = \frac{3}{2}$$

Så kan vi finne x ved å ta sjuenderoten av $\frac{3}{2}$:

$$x = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} = 1,0596$$

Dette tilsvarer en årlig avkastning på 5,96%. Konklusjon:

Avkastningen måtte vært på 5,96%.