

Forkurs i matematikk

Eksamen

8. juni 2021

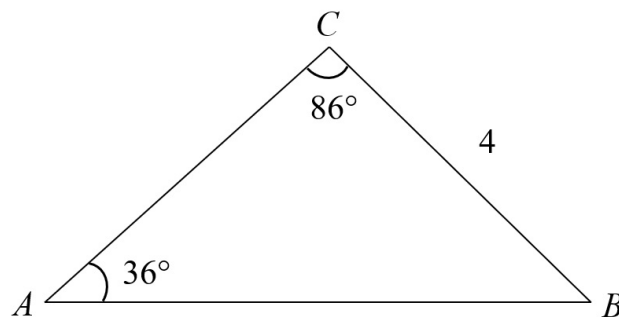
Løsningsforslag

Christian F. Heide

June 9, 2022

OPPGAVE 1

Gitt følgende trekant:



a) Finn de manglende sidekantene og den manglende vinkelen i trekanten.
Vinkel B finner vi enklest ved å benytte at vinkelsummen i en trekant er 180° :

$$A + B + C = 180^\circ$$

som gir

$$B = 180^\circ - A - C = 180^\circ - 36^\circ - 86^\circ = \underline{\underline{58^\circ}}$$

Så kan vi bruke sinussetningen for å finne de manglende sidekantene:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$$

Multipliserer vi så med $\sin B$ på begge sider, får vi

$$b = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin B$$

Setter vi inn tall, får vi

$$b = \frac{4}{\sin 36^\circ} \cdot \sin 58^\circ = \underline{\underline{5.77}}$$

Sidekant c kan vi også finne ved å bruke sinussetningen:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

$$c = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin C$$

$$c = \frac{4}{\sin 36^\circ} \cdot \sin 86^\circ = \underline{\underline{6.79}}$$

b) Finn arealet av trekanten.

$$T = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5.77 \cdot \sin 86^\circ = \underline{\underline{11.5}}$$

OPPGAVE 2

a) Løs følgende ulikhet ved regning:

$$\frac{x+1}{x-1} \geq 2$$

Vi flytter først 2-tallet over på venstre side:

$$\frac{x+1}{x-1} - 2 \geq 0$$

Vi utvider -2 slik at det blir en brøk med samme nevner som den første brøken:

$$\frac{x+1}{x-1} - 2 \cdot \frac{x-1}{x-1} \geq 0$$

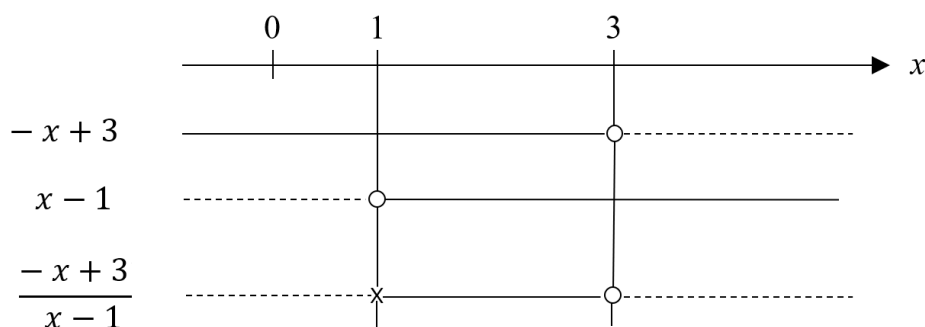
Så setter vi alt på felles brøkstrek:

$$\frac{x+1-2(x-1)}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{x+1-2x+2}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{-x+3}{x-1} \geq 0$$

Denne kan vi løse ved å tegne fortegnsskjema. Vi tegner en fortegnslinje for telleren, en fortegnslinje for nevneren og kan da tegne en fortegnslinje for brøken som helhet:



Oppgaven er å finne hvor brøken er større enn eller lik 0, altså positiv eller 0.

Vi ser at brøken er positiv når x er mellom 1 og 3, og den er 0 for $x = 3$.

Svaret blir følgende:

$$\underline{1 < x \leq 3}$$

b) Løs følgende ligning ved regning:

$$x-2 = \sqrt{7-2x}$$

Vi kvadrerer begge sider:

$$(x-2)^2 = (\sqrt{7-2x})^2$$

som gir

$$x^2 - 4x + 4 = 7 - 2x$$

Vi flytter alt over på venstre side:

$$x^2 - 4x + 4 - 7 + 2x = 0$$

og trekker sammen

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Vi kan løse denne ved hjelp av *abc*-formelen:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$
$$x = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \vee \quad x = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Vi må til slutt sette prøve på disse løsningene for å se om det er introdusert falske løsninger.

$x = 3$:

VS: $3 - 2 = 1$

HS: $\sqrt{7-2 \cdot 3} = \sqrt{7-6} = \sqrt{1} = 1$

Vi ser at VS = HS, så dette er en løsning av ligningen.

$x = -1$:

VS: $-1 - 2 = -3$

HS: $\sqrt{7-2 \cdot (-1)} = \sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3$

Vi ser at VS $\neq$ HS.

$x = -1$ er altså ikke en løsning av ligningen.

Løsningen av ligningen er altså

$$\underline{\underline{x = 3}}$$

OPPGAVE 3

a) Løs følgende ligning ved regning:

$$\lg(x+1) = 2$$

Siden 10^x er den inverse funksjonen til $\lg x$, vil den oppheve virkningen av $\lg x$. Vi tar derfor 10 opphøyd i begge sider:

$$10^{\lg(x+1)} = 10^2$$

$$x + 1 = 100$$

$$x = 100 - 1 = \underline{99}$$

b) Løs følgende ligning ved regning:

$$1000^{2x} = 10\,000$$

Vi tar først logaritmen på begge sider (vi kan selv velge om vi vil bruke den naturlige logaritmen $\ln$ eller den Briggske logaritmen $\lg$, men siden vi har tall som 1 000 og 10 000 her, er det mest naturlig å bruke $\lg$):

$$\lg 1000^{2x} = \lg 10000$$

$$2x \cdot \lg 1000 = 4$$

$$2x \cdot 3 = 4$$

$$2x = \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{4}{3 \cdot 2} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

OPPGAVE 4

Såkalte ultrafrysere er frysebokser som kan holde en temperatur på -86°C eller kaldere. De benyttes blant annet til lagring av vaksiner. En svært viktig komponent i slike fryssere er kompressoren, så det er viktig at den ikke ryker.

En produsent av ultrafrysere vurderer om de skal produsere fryssere med to kompressorer for å redusere sannsynligheten for at fryseren ryker. Kompressorene skal i så tilfelle kobles slik at det vil være tilstrekkelig at en av dem fungerer for at fryseren skal fungere.

Vi velger en tilfeldig dag, og definerer følgende hendelser:

A : kompressor 1 fungerer

B : kompressor 2 fungerer

Fra tidligere vet man at $P(A) = 0,98$ og $P(B) = 0,98$, og man har funnet at $P(A|B) = 0,99$.

a) Er hendelsene A og B uavhengige? Begrunn svaret.

Dersom A og B er uavhengige, er $P(A|B) = P(A)$. Her ser vi imidlertid at $P(A|B) = 0,99$ mens $P(A) = 0,98$. Disse er altså ikke like. Følgelig:

Hendelsene er ikke uavhengige.

b) Finn sannsynligheten for at begge kompressorene virker en tilfeldig dag.

Hendelse at begge kompressorene virker en vilkårlig dag, kan vi uttrykke $P(A \cap B)$.

Vi kan bruke produktsetningen til å finne denne:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B) = 0.98 \cdot 0.99 = \underline{0.9702}$$

c) Finn sannsynligheten for at fryseren virker en tilfeldig dag (altså at minst én av kompressorene virker).

Sannsynligheten for at minst én av kompressorene virker en tilfeldig dag, kan vi betegne $P(A \cup B)$. Denne finner vi ved hjelp av addisjonssetningen:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.98 + 0.98 - 0.9702 = \underline{0.9898}$$

OPPGAVE 5

I disse oppgavene må du vise hvordan du regner ut den deriverte og den integrerte. Å finne svarene på kalkulatoren gir ingen poeng.

a) Gitt funksjonen

$$f(x) = e^{2x-1}$$

Finn $f'(x)$.

Her må vi bruke kjerneregelen med kerne $u = 2x - 1$ sammen med regelen $(e^x)' = e^x$. Vi får da

$$f'(x) = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{2x-1} \cdot (2x-1)' = e^{2x-1} \cdot 2 = \underline{2e^{2x-1}}$$

b) Gitt funksjonen

$$g(x) = \frac{2x^2 + 5}{3x}$$

Finn $g'(x)$.

Her må vi bruke regelen for derivasjon av en brøk, som sier $\frac{u}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Vi får da

$$g'(x) = \frac{(2x^2 + 5)' \cdot 3x - (2x^2 + 5) \cdot (3x)'}{(3x)^2} = \frac{4x \cdot 3x - (2x^2 + 5) \cdot 3}{9x^2} =$$

$$\frac{12x^2 - (6x^2 + 15)}{9x^2} = \frac{12x^2 - 6x^2 - 15}{9x^2} = \frac{6x^2 - 15}{9x^2} =$$

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot x^2 - 3 \cdot 5}{3 \cdot 3 \cdot x^2} = \frac{3(2x^2 - 5)}{3 \cdot 3x^2} =$$

$$\frac{2x^2 - 5}{3x^2}$$

c) Regn ut integralet

$$\int_2^5 (6x^2 - 2) dx$$

$$\int_2^5 (6x^2 - 2) dx = \left[\frac{1}{2+1} \cdot 6x^{2+1} - 2x \right]_2^5 =$$

$$\left[\frac{1}{3} \cdot 6x^3 - 2x \right]_2^5 = [2x^3 - 2x]_2^5 =$$

$$2 \cdot 5^3 - 2 \cdot 5 - (2 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2) = 250 - 10 - 16 + 4 =$$

$$\underline{\underline{228}}$$

OPPGAVE 6

a) Gitt vektoren $\vec{u} = [-2, -4]$. Finn lengden av denne vektoren.

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \underline{\underline{\sqrt{20}}}$$

b) Gitt vektoren $\vec{v} = [1, -2]$.

Finn skalarproduktet $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = [-2, -4] \cdot [1, -2] = (-2) \cdot 1 + (-4) \cdot (-2) = -2 + 8 = \underline{\underline{6}}$$

c) Finn vinkelen mellom vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Her kan vi bruke definisjonen av skalarprodukt:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Løser vi denne med hensyn på cosinus til vinkelen, får vi

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Vi mangler her kun lengden til $\vec{v}$ for å kunne regne ut dette. Vi finner

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Vi kan nå regne ut cosinus til vinkelen:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{6}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}} = 0.6$$

Vinkelen mellom vektorene er følgende

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \cos^{-1} 0.6 = \underline{\underline{53.1^\circ}}$$

OPPGAVE 7

Ole tar et forkurs i matematikk ved Høyskolen i Nordfold. Ole har lyst til å bestå kurset, men klarer ikke finne motivasjonen til å arbeide med faget før eksamen begynner å nærme seg. Ole legger merke til at motivasjonen og arbeidslysten øker dag for dag, og tenker at det kan være en fin øvelse til eksamen å regne litt på dette.

Ole starter med å forberede seg 91 dager før eksamen. På en skala fra 1 (ingenting) til 100 (maksimal) så starter Ole med en arbeidslyst på 1 den første dagen. Han ønsker å avslutte med en arbeidslyst på 100 dagen før eksamen.

Ole antar at arbeidslysten vil stige med samme faktor hver dag. La oss kalle denne vekstfaktoren for a . Det betyr altså at arbeidslysten den første dagen er 1, den andre dagen er den steget til $1 \cdot a$, den tredje dagen er den $1 \cdot a \cdot a$, osv.

a) *Finn vekstfaktoren a hvis arbeidslysten skal være kommet opp i 100 den 90. dagen.*

Vi kaller arbeidslysten etter t dager for $A(t)$. Den 90. dagen er arbeidslysten kommet opp i

$$A(90) = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{89 \text{ } a\text{-er}} = 1 \cdot a^{89} = a^{89}$$

Hvis arbeidslysten skal være kommet opp i 100 etter 90 dager, får vi

$$A(90) = 100$$

$$a^{89} = 100$$

Tar vi så 89. roten på begge sider, får vi

$$a = (100)^{\frac{1}{89}} = 1.053105571 \approx \underline{\underline{1,053}}$$

Alternativt kan vi regne det ut ved å bruke logaritmer:

$$a^{89} = 100$$

Vi tar logaritmen på begge sider:

$$\lg a^{89} = \lg 100$$

$$89 \cdot \lg a = 2$$

$$\lg a = \frac{2}{89}$$

$$10^{\lg a} = 10^{\frac{2}{89}}$$

$$a = 10^{\frac{2}{89}} \approx \underline{\underline{1,053}}$$

b) *Hvilken prosentvis økning tilsvarer den verdien av a som du fant i spørsmål a? Hvis du ikke fant noe svar i spørsmål a, kan du selv velge en vekstfaktor a og bruke verdien du velger både i dette og de neste spørsmålene.*

En vekstfaktor på 1.053 tilsvarer en prosentvis økning på 5.3 %.

Dette ser man direkte av vekstfaktoren, men den kan selvsagt regnes ut også. Sammenhengen mellom vekstfaktor og prosentvis vekst, er:

$$a = 1 + \frac{p}{100}$$

Flytter vi 1-eren over på venstre side, får vi

$$a - 1 = \frac{p}{100}$$

Så snur vi likheten helt rundt:

$$\frac{p}{100} = a - 1$$

Så ganger vi på begge sider med 100, og får

$$p = (a - 1) \cdot 100$$

Setter vi inn tall, finner vi

$$p = (1.053 - 1) \cdot 100 = 0.053 \cdot 100 = \underline{\underline{5.3}}$$

c) *Hvor mange dager tar det før Ole har fått en arbeidslyst på nivå 50?*

Fra spørsmål a har vi

$$A(t) = 1.053105571^{t-1}$$

Vi skal nå finne den t som gjør at

$$A(t) = 50$$

Vi finner da

$$1.053105571^{t-1} = 50$$

Vi tar logaritmen på begge sider, og får

$$\ln 1.053105571^{t-1} = \ln 50$$

$$(t-1) \cdot \ln 1.053105571 = \ln 50$$

$$t = \frac{\ln 50}{\ln 1.053105571} + 1 = 75.6 + 1 = \underline{76.6}$$

Det tar litt over 76 dager før arbeidslysten til Ole kommer opp i 50.

d) *Det gikk ikke så bra på eksamen for Ole, og han sitter og reflekterer over hva som gikk galt før han skal i gang med et nytt forsøk året etter ...*

Året etter begynner han nok en gang å forberede seg 91 dager før eksamen, men denne gangen ønsker han å nå maksimal arbeidslyst (på 100) allerede etter 70 dager. Dersom han skal klare dette, kan han ikke starte med en arbeidslyst på 1, men må starte med en høyere arbeidslyst.

Hvilket nivå må Ole starte på dersom han øker arbeidslysten med samme faktor a som i oppgave a og skal nå et nivå på 100 etter 70 dager?

La oss kalle startnivået for s . Arbeidslysten etter t dager med startnivå s kan vi skrive

$$A(t) = s \cdot 1.053105571^{t-1}$$

Vi skal nå finne hva s må være for at $A(70)$ skal bli 100:

$$s \cdot 1.053105571^{70-1} = 100$$

Vi deler på begge sider med 1.053105571^{69} og får

$$s = \frac{100}{1.053105571^{69}} = \frac{100}{35.527267} = \underline{2.81}$$

Ole må starte med en arbeidslyst på 2.81 på dag 1 for at arbeidslysten skal ha nådd 100 allerede 70 dager før eksamen.